

MIT 18.06 线性代数

第二十讲：行列式的几何意义

整理自 MIT 18.06 课程及相关公开笔记

引言

经过前两讲对行列式性质和计算方法的探讨，本讲将正式介绍行列式三个重要的实际应用方向：**伴随矩阵**、**克莱姆法则** (Cramer's Rule)，以及**行列式的几何意义**。其中，逆矩阵公式和克莱姆法则更多地用于数学计算，而行列式与面积、体积的联系则是连接线性代数与几何直观的重要桥梁。

1 伴随矩阵

1.1 代数余子式矩阵与伴随矩阵

已知二阶矩阵的逆矩阵公式为：

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{ad - bc} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$$

观察上述二阶公式的结构可以发现，逆矩阵的系数项为矩阵行列式的倒数 $\frac{1}{|A|}$ ，而后面的矩阵恰好是由原矩阵各元素对应的**代数余子式**构成的。

以此类推，对于任意 n 阶可逆方阵 A ，逆矩阵的通用公式定义为：

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} C^T$$

其中，矩阵 C 称为**代数余子式矩阵** (Cofactor Matrix)，即由矩阵 A 中每个元素 a_{ij} 对应的代数余子式 C_{ij} 构成的矩阵：

$$C = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & \cdots & C_{1n} \\ C_{21} & C_{22} & \cdots & C_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ C_{n1} & C_{n2} & \cdots & C_{nn} \end{bmatrix}$$

而矩阵 C 的转置，即 C^T ，被称为**伴随矩阵** (Adjugate Matrix)，通常记作 A^* ：

$$A^* = C^T = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{21} & \cdots & C_{n1} \\ C_{12} & C_{22} & \cdots & C_{n2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ C_{1n} & C_{2n} & \cdots & C_{nn} \end{bmatrix}$$

因此，逆矩阵公式亦可写为：

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} A^*$$

1.2 公式证明

为了验证 $A^{-1} = \frac{1}{|A|}C^T$ ，只需验证等式 $AC^T = |A|I$ 是否成立即可。

计算乘积 AC^T 中的**对角线元素**（例如第 1 行第 1 列）：

$$\sum_{j=1}^n a_{1j}C_{1j}$$

这恰好是行列式 $|A|$ 按第一行展开的代数余子式公式，其结果为 $|A|$ 。同理，所有对角线位置的乘积运算结果均为 $|A|$ 。

观察乘积 AC^T 中的**非对角线元素**（例如第 2 行第 1 列）：

$$\sum_{j=1}^n a_{2j}C_{1j}$$

如果构造一个新的矩阵 A_s ，将矩阵 A 的第一行替换为第二行的元素，那么对 A_s 按第一行进行代数余子式展开，结果正好是上述求和式：

$$\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{21}C_{11} + a_{22}C_{12} + \cdots + a_{2n}C_{1n}$$

根据行列式的性质（性质 4），具有两行完全相同的矩阵，其行列式必然为 0。因此，非对角线位置的值为 0。矩阵 AC^T 中所有非对角线元素均为 0，最终得到：

$$AC^T = \begin{bmatrix} |A| & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & |A| & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & |A| \end{bmatrix} = |A|I$$

由此得出：

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|}C^T$$

1.3 行列式的性质

命题：若 A 是 n 阶矩阵， A^* 是 A 的伴随矩阵，则 $|A^*| = |A|^{n-1}$ 。

证明：从逆矩阵公式及伴随矩阵定义出发，满足下列恒等式：

$$AA^* = |A|I_n$$

对上述等式两边同时取行列式，得到：

$$|AA^*| = ||A|I_n|$$

根据行列式的乘积性质 ($|AB| = |A||B|$) 以及数乘矩阵的行列式性质 ($|kI_n| = k^n$)，可将等式写为：

$$|A| \cdot |A^*| = |A|^n$$

接下来，根据矩阵 A 是否可逆，分两种情况讨论：

1. 当 A 可逆时 (即 $|A| \neq 0$): 在等式两边同时除以 $|A|$ 可得:

$$|A^*| = |A|^{n-1}$$

2. 当 A 不可逆时 (即 $|A| = 0$): 此时原命题转化为证明 $|A^*| = 0$ 。

令 $r = \text{rank}(A)$, 矩阵的秩指的是矩阵中非零子式的最高阶数。

- 若 $r \leq n-2$, 则 A 的所有 $n-1$ 阶子式都为 0, 因此所有代数余子式都为 0, 所以 $|A^*| = 0$ 。
- 若 $r = n-1$, 由 $AA^* = |A|I = 0$ 可知 A^* 的每一列都是齐次线性方程组 $AX = 0$ 的解。而 $r = n-1$, 所以方程组 $AX = 0$ 的解空间维数为 $n-r = 1$, 因此 A^* 的列向量都在一个一维子空间中, 故 $\text{rank}(A^*) \leq 1$; 由于 $n \geq 2$, 所以 $\text{rank}(A^*) < n$, 从而 $|A^*| = 0$ 。

证毕。注意: 通常该公式默认 $n \geq 2$, 当 $n = 1$ 时, $A = (a)$, 按定义 $A^* = (1)$, 所以 $|A^*| = 1$ 。若约定 $|A|^0 = 1$, 则公式也成立。

2 克莱姆法则

克莱姆法则提供了一种通过行列式来求解线性方程组 $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ 的方法。当 A 为可逆方阵时, 根据逆矩阵公式, 方程的解可以写为:

$$\mathbf{x} = A^{-1}\mathbf{b} = \frac{1}{|A|}C^T\mathbf{b}$$

对于解向量 $\mathbf{x}$ 的第 j 个分量 x_j , 其分子正是一个代数余子式的线性组合。将 $C^T\mathbf{b}$ 展开:

$$\begin{aligned} C^T\mathbf{b} &= \begin{bmatrix} C_{11} & C_{21} & \cdots & C_{n1} \\ C_{12} & C_{22} & \cdots & C_{n2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ C_{1n} & C_{2n} & \cdots & C_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} b_1C_{11} + b_2C_{21} + \cdots + b_nC_{n1} \\ b_1C_{12} + b_2C_{22} + \cdots + b_nC_{n2} \\ \vdots \\ b_1C_{1n} + b_2C_{2n} + \cdots + b_nC_{nn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} |B_1| \\ |B_2| \\ \vdots \\ |B_n| \end{bmatrix} \end{aligned}$$

构造一个新的矩阵 B_j , 将矩阵 A 的第 j 列替换为向量 $\mathbf{b}$, 得到:

$$B_j = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & b_1 & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & b_2 & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & b_n & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

对 B_j 按第 j 列进行代数余子式展开, 结果正是 $C^T\mathbf{b}$ 的第 j 个分量。因此, 克莱姆法则可以简洁地表示为:

$$x_j = \frac{|B_j|}{|A|}, \quad j = 1, 2, \dots, n$$

其中 B_j 是将 A 的第 j 列用向量 $\mathbf{b}$ 替换后得到的矩阵。

3 行列式的几何意义

3.1 面积与体积

对于任意一个 2×2 的矩阵 A ，由其两个列向量构成的平行四边形的面积等于 $|A|$ ；对于任意一个 3×3 的矩阵 A ，由其三个列向量构成的平行六面体的体积等于 $|A|$ 。行列式的符号（正或负）表示该空间图形对应于右手坐标系或左手坐标系。

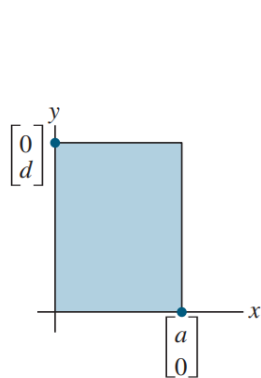


FIGURE 1
Area = $|ad|$.

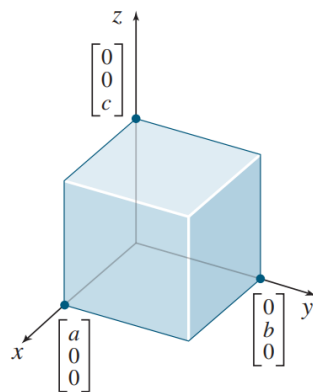


FIGURE 3
Volume = $|abc|$.

图 1: 由矩阵列向量张成的平行四边形面积（2D）与平行六面体体积（3D）等于行列式的绝对值

3.2 几何证明

该几何结论的证明依赖于行列式的三大基本性质与几何直观的对应：

1. **单位阵与对角阵**：对于对角矩阵 $\text{diag}(a, b, c)$ ，对应的立体是边长为 a, b, c 的长方体，其体积显然为 $abc = |A|$ 。
2. **列交换**：对矩阵的列进行交换仅改变了空间立体的朝向，并不会改变其体积，同时行列式的绝对值也不发生改变。
3. **列上加倍**：对于二维平面的列向量 $\mathbf{a}_1$ 和 $\mathbf{a}_2$ ，如果将第二个向量换为 $\mathbf{a}_2 + c\mathbf{a}_1$ ，新的平行四边形与旧平行四边形共享底边 $\mathbf{a}_1$ ，且顶点都位于同一条平行于底边的直线上（ $\mathbf{a}_2$ 是起点， $c\mathbf{a}_1$ 是位移， $\mathbf{a}_2 + c\mathbf{a}_1$ 是最终到达的新位置），因此它们拥有相同的高，面积不变。在三维空间中，对列向量做类似的替换操作也只会让平行六面体的顶面沿着平行于底面的平面平移，其高和底面积均不发生改变，因此体积保持不变。

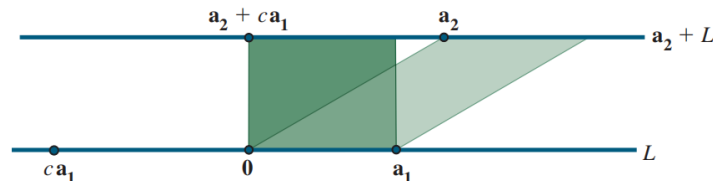


FIGURE 2 Two parallelograms of equal area.

图 2: 平行四边形顶点平行移动时，因底和高相等，面积保持不变

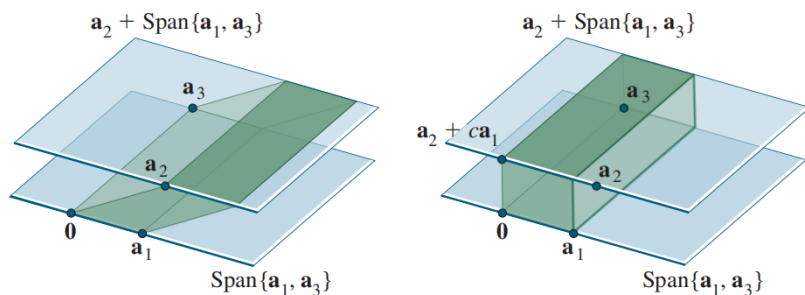


FIGURE 4 Two parallelepipeds of equal volume.

图 3: 平行六面体顶面平行移动时, 因底面和高相等, 体积保持不变

由于任何方阵都可以通过列交换和列加减变换化为对角阵, 而在此过程中行列式的绝对值与图形体积均保持不变, 因此证明了列向量张成的空间图形体积必然等于行列式的绝对值。

3.3 面积计算

二阶行列式的值等于平行四边形的面积, 其一半是 $(x_1, y_1), (x_2, y_2)$ 和原点围成的三角形的面积:

$$S = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix}$$

对于不包含原点的任意三个顶点 $(x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3)$, 对应三角形面积计算公式为:

$$S = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix}$$

该公式的核心原理是: 通过行列式中消元将第 3 列 (全是 1) 消去, 等价于将目标三角形整体平移至以原点为顶点, 再计算原点到另两顶点的行列式面积。行/列消元不改变行列式的绝对值。

例如, 给定四个点 $(-2, -2), (0, 3), (4, -1), (6, 4)$ 构成的平行四边形 (可以看成两个三角形), 只需将其中一个顶点平移到原点:

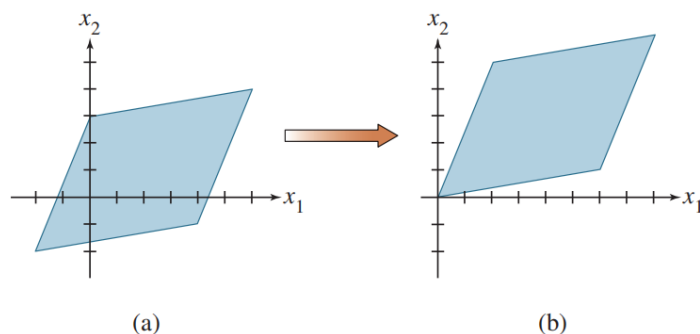


FIGURE 5 Translating a parallelogram does not change its area.

图 4: 任意三点所围成的三角形面积可通过平移至原点后求行列式计算

如将 $(-2, -2)$ 平移到原点, 另外两个顶点变为 $\begin{bmatrix} 2 \\ 5 \end{bmatrix}$ 和 $\begin{bmatrix} 6 \\ 1 \end{bmatrix}$, 其围成的平行四边形面积为:

$$\left| \begin{bmatrix} 2 & 6 \\ 5 & 1 \end{bmatrix} \right| = |2 - 30| = 28$$

3.4 面积与体积的缩放

行列式的几何意义还可以推广到**线性变换**的领域。若 $T: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ 是由矩阵 A 确定的线性变换, 则对于平面上的任意图形 S 或空间中的任意立体 S , 其经过线性变换后的面积 (或体积) 与原始图形面积 (或体积) 之间存在以下固定比例关系:

设 T 是由 2×2 矩阵 A 确定的线性变换, 若 S 是 $\mathbb{R}^2$ 中的一个平行四边形, 则

$$\{\text{area of } T(S)\} = |A| \cdot \{\text{area of } S\}$$

若 T 是由 3×3 矩阵 A 确定的线性变换, 若 S 是 $\mathbb{R}^3$ 中的一个平行六面体, 则

$$\{\text{volume of } T(S)\} = |A| \cdot \{\text{volume of } S\}$$

根据矩阵乘积的性质, 这一结论可得到证明。假设平面上的任意平行四边形 S 是由列向量 $\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2$ 构成的, 则其对应的矩阵为 $B = [\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2]$, 面积为 $|B|$; 变换后的矩阵为 $[A\mathbf{b}_1, A\mathbf{b}_2] = AB$, 因此变换后的面积即为 $|AB| = |A| \cdot |B|$ 。行列式的绝对值 $|A|$ 起到了**面积 (或体积) 缩放因子**的作用。

总结

本讲完整阐述了行列式的三个核心应用方向, 补充了行列式的几何意义:

- **逆矩阵公式:** $A^{-1} = \frac{1}{|A|}C^T$, 伴随矩阵 C^T 的每一项均为代数余子式。该公式是解析求逆的数学依据, 但在大规模数值计算中效率低于消元法。
- **克莱姆法则:** 求解线性方程组 $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ 的解为 $x_j = \frac{|B_j|}{|A|}$, 其中 B_j 是将 A 的第 j 列用向量 $\mathbf{b}$ 替换后得到的矩阵。
- **行列式的几何意义:** $|A|$ 等于以矩阵 A 的列向量为边的平行四边形的面积和平行六面体的体积。同时, 矩阵 A 对应的线性变换起到了面积或体积的缩放作用, 缩放因子即 $|A|$ 。

面积证明

对于平面上任意两个向量 $\mathbf{u} = (u_1, u_2)$ 和 $\mathbf{v} = (v_1, v_2)$ ，设 $\mathbf{u}$ 与 $\mathbf{v}$ 的夹角为 θ ，它们张成的平行四边形的面积 S 为：

$$S = \|\mathbf{u}\| \cdot \|\mathbf{v}\| \cdot \sin \theta$$

平方得：

$$S^2 = \|\mathbf{u}\|^2 \|\mathbf{v}\|^2 \sin^2 \theta = \|\mathbf{u}\|^2 \|\mathbf{v}\|^2 (1 - \cos^2 \theta)$$

利用点积公式 $\cos \theta = \frac{\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}}{\|\mathbf{u}\| \|\mathbf{v}\|}$ ，代入得：

$$S^2 = \|\mathbf{u}\|^2 \|\mathbf{v}\|^2 - (\mathbf{u} \cdot \mathbf{v})^2$$

代入坐标形式 ($\mathbf{u} = (u_1, u_2)$, $\mathbf{v} = (v_1, v_2)$):

$$S^2 = (u_1^2 + u_2^2)(v_1^2 + v_2^2) - (u_1 v_1 + u_2 v_2)^2$$

展开并化简：

$$S^2 = u_1^2 v_2^2 + u_2^2 v_1^2 - 2u_1 u_2 v_1 v_2 = (u_1 v_2 - u_2 v_1)^2$$

两边开平方（面积取正值）：

$$S = |u_1 v_2 - u_2 v_1|$$

而右边正是二阶行列式的绝对值：

$$\begin{vmatrix} u_1 & u_2 \\ v_1 & v_2 \end{vmatrix} = |u_1 v_2 - u_2 v_1|$$

因此，二阶行列式的绝对值等于平行四边形面积。

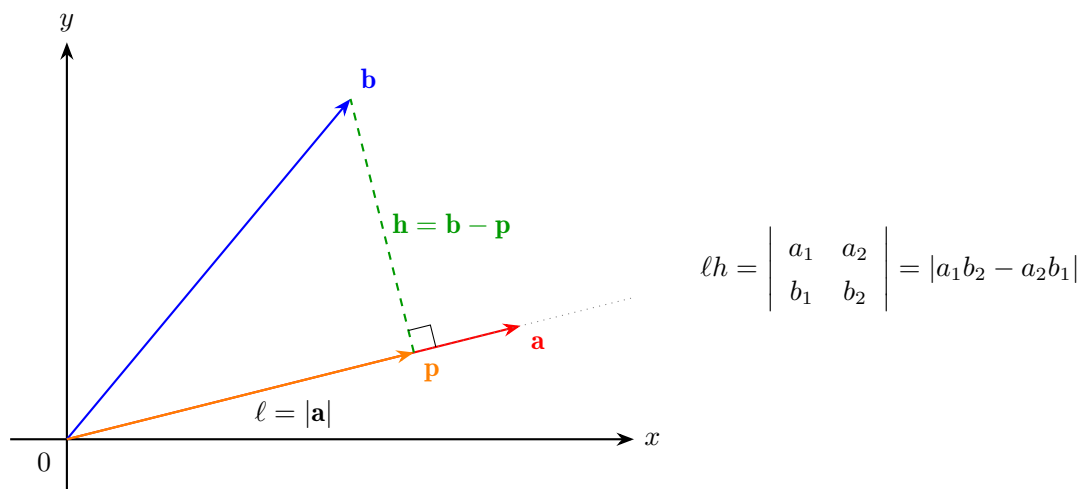


图 5: 平行四边形面积 = 底 ℓ $\times$ 高 h ，等于对应二阶行列式的绝对值

设 $\mathbf{a} = (a_1, a_2)$, $\mathbf{b} = (b_1, b_2)$, $\mathbf{p} = (p_1, p_2)$ ，向量 $\mathbf{a}$ 和 $\mathbf{b}$ 围成的平行四边形的面积，就等于底边长 ℓ 与高度 h 的乘积，即两个互相垂直的向量 $\mathbf{a}$ 和 $\mathbf{h}$ 所围成矩形的面积。

$\mathbf{a}$ 和 $\mathbf{h}$ 的夹角 $\theta = 90^\circ$, $\sin \theta = 1$ ，由 $\mathbf{a}$ 和 $\mathbf{h}$ 张成的平行四边形实际上是矩形，根据二阶行列式的性质，矩形的面积等于 $\begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ h_1 & h_2 \end{vmatrix}$ ，其中 $\mathbf{h} = (h_1, h_2)$ 。

因为投影向量 $\mathbf{p}$ 与 $\mathbf{a}$ 同方向，根据行列式按行线性性质可得：

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 - p_1 & b_2 - p_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ p_1 & p_2 \end{vmatrix}$$

而由于 $\mathbf{p}$ 是 $\mathbf{a}$ 的标量倍数，两行成比例，故第二项行列式为 0。因此，平行四边形面积等于 $\begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}$ 。

由上述结论可以推导出平面上任意三点（不论是否包含原点）所围成三角形面积的计算公式。

对于包含原点的三角形，另外两个顶点 $(x_1, y_1), (x_2, y_2)$ ，面积等于对应平行四边形面积的一半：

$$S = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix}$$

对于不包含原点的任意三个顶点 $(x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3)$ ，三角形面积计算公式为：

$$S = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix}$$

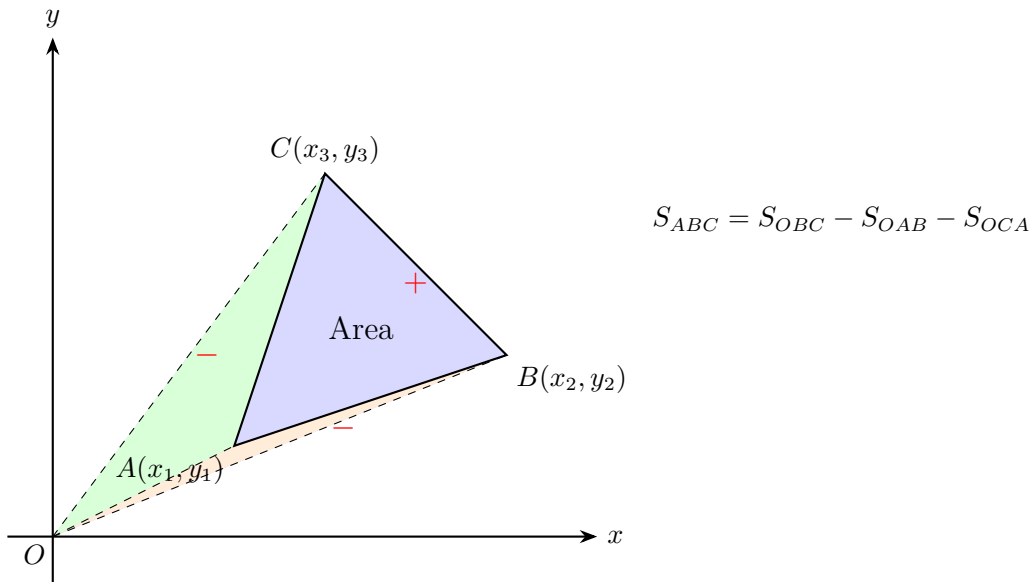


图 6: 三角形面积公式的几何解释

$$D = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix}$$

按第三列展开：

$$\begin{aligned} D &= 1 \cdot C_{13} + 1 \cdot C_{23} + 1 \cdot C_{33} \\ &= (+1) \cdot \begin{vmatrix} x_2 & y_2 \\ x_3 & y_3 \end{vmatrix} + (-1) \cdot \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_3 & y_3 \end{vmatrix} + (+1) \cdot \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix} \\ &= (x_2 y_3 - y_2 x_3) - (x_1 y_3 - y_1 x_3) + (x_1 y_2 - y_1 x_2) \end{aligned}$$

将上式重新排列项的顺序，整理成三个二阶行列式的和，重新组合为“有向面积”之和：

$$\begin{aligned} D &= (x_1y_2 - y_1x_2) + (x_2y_3 - y_2x_3) + (x_3y_1 - y_3x_1) \\ &= \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x_2 & y_2 \\ x_3 & y_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x_3 & y_3 \\ x_1 & y_1 \end{vmatrix} \end{aligned}$$

将三角形 ABC 平移， A 移到原点，根据向量 $\overrightarrow{AB}$ 和 $\overrightarrow{AC}$ ，平移后的面积行列式（记作 D' ）为：

$$D' = \begin{vmatrix} x_2 - x_1 & y_2 - y_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 \end{vmatrix}$$

展开 D' ，恰好等于上一步得到的 D ：

$$\begin{aligned} D' &= (x_2 - x_1)(y_3 - y_1) - (y_2 - y_1)(x_3 - x_1) \\ &= x_2y_3 - x_2y_1 - x_1y_3 + x_1y_1 - y_2x_3 + y_2x_1 + y_1x_3 - y_1x_1 \\ &= x_2y_3 - y_2x_3 + x_3y_1 - y_3x_1 + x_1y_2 - y_1x_2 \\ &= (x_1y_2 - y_1x_2) + (x_2y_3 - y_2x_3) + (x_3y_1 - y_3x_1) \end{aligned}$$

由此可见，按第三列展开得到的三个二阶行列式（分别对应 OAB 、 OBC 、 OCA 的有向面积）在代数上完全等价于将 A 点平移到原点，由 $\overrightarrow{AB}$ 和 $\overrightarrow{AC}$ 构成的行列式。

体积证明

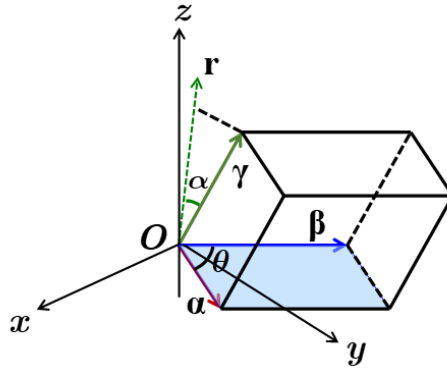


图 7: 三阶行列式的几何意义

设 $\alpha = (a_{11}, a_{12}, a_{13})$, $\beta = (a_{21}, a_{22}, a_{23})$, $\gamma = (a_{31}, a_{32}, a_{33})$ 是 $\mathbb{R}^3$ 中的三个向量，定义三阶行列式：

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

若 α, β, γ 两两不共面（即线性无关），则以它们为相邻棱所张成的平行六面体的体积 V 等于 $|D|$ ；若它们共面或含有零向量，则 $D = 0$ ，体积也为零。下面给出具体证明。

以 α, β 张成的平行四边形，面积记为 S ，由二阶行列式的几何意义：

$$S^2 = \|\alpha\|^2 \|\beta\|^2 - (\alpha \cdot \beta)^2$$

设 γ 与该平行四边形所在平面的夹角为 ω (即 γ 与法向量 $\mathbf{r}$ 的夹角), 则平行六面体的高为:

$$h = \|\gamma\| |\cos \omega|$$

因此体积:

$$V = Sh = \|\alpha\| \|\beta\| \sin \theta \|\gamma\| |\cos \omega|$$

令 $\mathbf{r} = (x, y, z)$, 与 α, β 都垂直, 即满足:

$$\begin{cases} a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z = 0 \\ a_{21}x + a_{22}y + a_{23}z = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a_{11}x + a_{12}y = -a_{13}z \\ a_{21}x + a_{22}y = -a_{23}z \end{cases}$$

由 Cramer 法则, 取 z 为参数, 得:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} -a_{13}z & a_{12} \\ -a_{23}z & a_{22} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}} = -\frac{a_{13}a_{22} - a_{12}a_{23}}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}} z$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & -a_{13}z \\ a_{21} & -a_{23}z \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}} = -\frac{a_{11}a_{23} - a_{13}a_{21}}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}} z$$

令 $\Delta = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$, 因此可选取:

$$\mathbf{r} = \left(-\frac{a_{13}a_{22} - a_{12}a_{23}}{\Delta}, -\frac{a_{11}a_{23} - a_{13}a_{21}}{\Delta}, 1 \right)$$

为方便, 取:

$$\mathbf{r} = \left(-\begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23} \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{21} & a_{23} \end{vmatrix}, -\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \right)$$

由点积的定义: $\gamma \cdot \mathbf{r} = \|\gamma\| \|\mathbf{r}\| \cos \omega$, 两边同时除以 $\|\mathbf{r}\|$ 并取绝对值, 得到 γ 在法向量 $\mathbf{r}$ 方向上的投影长度:

$$h = \|\gamma\| |\cos \omega| = \left| \frac{\gamma \cdot \mathbf{r}}{\|\mathbf{r}\|} \right|$$

于是

$$V = Sh = \frac{S |\gamma \cdot \mathbf{r}|}{\|\mathbf{r}\|}$$

将 $S^2 = \|\alpha\|^2 \|\beta\|^2 - (\alpha \cdot \beta)^2$ 代入, 得:

$$V^2 = \frac{(\|\alpha\|^2 \|\beta\|^2 - (\alpha \cdot \beta)^2) (\gamma \cdot \mathbf{r})^2}{\|\mathbf{r}\|^2}$$

其中点积: $\alpha \cdot \beta = \|\alpha\| \|\beta\| \cos \theta$, 叉积的模: $\|\alpha \times \beta\| = \|\alpha\| \|\beta\| \sin \theta$ 。两边平方叉积式, 代入点积公式, 得到:

$$\|\alpha \times \beta\|^2 = \|\alpha\|^2 \|\beta\|^2 - (\alpha \cdot \beta)^2$$

下面验证 $\|\mathbf{r}\|$ 的取值使得:

$$\|\mathbf{r}\|^2 = \|\alpha\|^2 \|\beta\|^2 - (\alpha \cdot \beta)^2$$

$$\mathbf{r} = (r_1, r_2, r_3) = \left(- \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23} \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{21} & a_{23} \end{vmatrix}, - \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \right)$$

即

$$r_1 = a_{13}a_{22} - a_{12}a_{23}$$

$$r_2 = a_{11}a_{23} - a_{13}a_{21}$$

$$r_3 = a_{12}a_{21} - a_{11}a_{22}$$

于是 $\|\mathbf{r}\|^2 = r_1^2 + r_2^2 + r_3^2$; 另一方面,

$$\|\boldsymbol{\alpha}\|^2\|\boldsymbol{\beta}\|^2 - (\boldsymbol{\alpha} \cdot \boldsymbol{\beta})^2 = (a_{11}^2 + a_{12}^2 + a_{13}^2)(a_{21}^2 + a_{22}^2 + a_{23}^2) - (a_{11}a_{21} + a_{12}a_{22} + a_{13}a_{23})^2$$

展开并化简:

$$\begin{aligned} & \|\boldsymbol{\alpha}\|^2\|\boldsymbol{\beta}\|^2 - (\boldsymbol{\alpha} \cdot \boldsymbol{\beta})^2 \\ &= a_{11}^2a_{22}^2 + a_{11}^2a_{23}^2 + a_{12}^2a_{21}^2 + a_{12}^2a_{23}^2 + a_{13}^2a_{21}^2 + a_{13}^2a_{22}^2 \\ &\quad - 2(a_{11}a_{12}a_{21}a_{22} + a_{11}a_{13}a_{21}a_{23} + a_{12}a_{13}a_{22}a_{23}) \\ &= (a_{13}a_{22} - a_{12}a_{23})^2 + (a_{11}a_{23} - a_{13}a_{21})^2 + (a_{12}a_{21} - a_{11}a_{22})^2 \\ &= r_1^2 + r_2^2 + r_3^2 \\ &= \|\mathbf{r}\|^2 \end{aligned}$$

因此 $\|\boldsymbol{\alpha}\|^2\|\boldsymbol{\beta}\|^2 - (\boldsymbol{\alpha} \cdot \boldsymbol{\beta})^2 = \|\mathbf{r}\|^2$, 于是 $V^2 = (\boldsymbol{\gamma} \cdot \mathbf{r})^2$, 即 $V = |\boldsymbol{\gamma} \cdot \mathbf{r}|$ 。

$\mathbf{r}$ 与 $\boldsymbol{\gamma} = (a_{31}, a_{32}, a_{33})$ 作点积, 得到:

$$|\boldsymbol{\gamma} \cdot \mathbf{r}| = a_{31} \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23} \end{vmatrix} - a_{32} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{21} & a_{23} \end{vmatrix} + a_{33} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$$

这正是行列式 D 按第三行展开的形式, 即 $|\boldsymbol{\gamma} \cdot \mathbf{r}| = |D|$, 所以 $V = |D|$, 证毕。