MIT 18.06 线性代数
第十讲：四个基本子空间

整理自 MIT 18.06 课程及相关公开笔记

引言

本讲将讨论线性代数中极为核心的内容：矩阵的四个基本子空间及其相互关系。对于任意 $m \times n$ 矩阵 A，都可以定义出四个关键的子空间，分别位于 $\mathbb{R}^m$ 和 $\mathbb{R}^n$ 空间中。通过研究这些子空间的基与维数，可以从几何与代数的双重层面完整掌握矩阵的性质。

1 四个基本子空间

设 A 为 $m \times n$ 矩阵，其秩为 r，矩阵 A 的四个基本子空间为：

1. **列空间**（Column Space），记为 $C(A)$，位于 $\mathbb{R}^m$ 中。
2. **零空间**（Nullspace），记为 $N(A)$，位于 $\mathbb{R}^n$ 中。
3. **行空间**（Row Space），记为 $C(A^T)$，位于 $\mathbb{R}^n$ 中。
4. **左零空间**（Left Nullspace），记为 $N(A^T)$，位于 $\mathbb{R}^m$ 中。

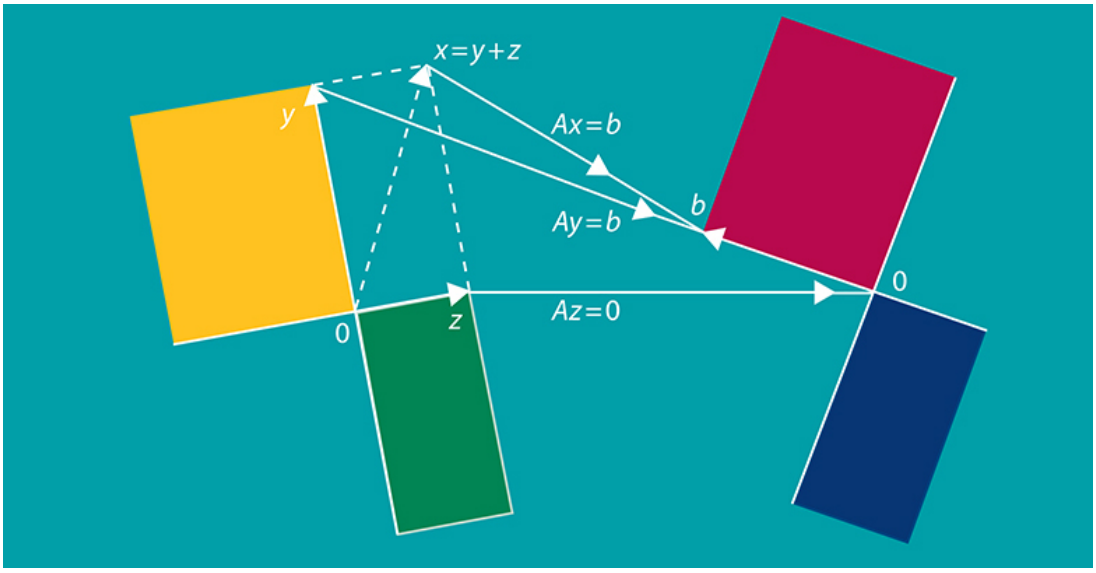

图 1: 四个基本子空间

1.1 列空间 $C(A)$

列空间 $C(A)$ 是由矩阵 A 的所有列向量的线性组合构成的 $\mathbb{R}^m$ 的子空间。

- **基**：矩阵 A 的 r 个**主元列**构成列空间的一组基。需注意，通过初等行变换消元后得到的行阶梯形矩阵 U 虽然改变了列空间，但消元过程不会改变列向量之间的线性相关性关系。
- **维数**：$\dim(C(A)) = r$

1.2 零空间 $N(A)$

零空间 $N(A)$ 是满足齐次方程组 $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ 的所有解向量 $\mathbf{x}$ 构成的 $\mathbb{R}^n$ 的子空间。

- **基**：通过对自由变量依次赋值 1 和 0，求得的 $(n-r)$ 个**特解**构成零空间的一组基。
- **维数**：$\dim(N(A)) = n - r$

1.3 行空间 $C(A^T)$

行空间 $C(A^T)$ 是由矩阵 A 的所有行向量的线性组合构成的 $\mathbb{R}^n$ 的子空间，本质上等价于转置矩阵 A^T 的列空间。

行空间在行变换下保持不变，因为行变换的本质是对原有的行向量进行线性组合，因此变换前后，行向量组张成的空间是相同的。需要强调的是，列空间在行变换下会发生变化。

- **基**：将矩阵 A 化为**行简化阶梯形矩阵**，R 中前 r 个非零行向量构成行空间的一组基。
- **维数**：$\dim(C(A^T)) = r$

1.4 左零空间 $N(A^T)$

左零空间 $N(A^T)$ 是满足 $A^T\mathbf{y} = \mathbf{0}$ 的所有解向量 $\mathbf{y}$ 构成的 $\mathbb{R}^m$ 的子空间。对等式两边同时转置，可得 $\mathbf{y}^T A = \mathbf{0}$。由于行向量 $\mathbf{y}^T$ 出现在矩阵 A 的左侧进行运算，因此得名“左零空间”。左零空间中的向量 $\mathbf{y}$ 反映的是矩阵 A 各**行向量**之间存在的线性相关关系。

求左零空间的基，通常采用**高斯-若尔当消元法**的增广矩阵形式：

$$[A_{m\times n} \mid I_{m\times m}] \xrightarrow{\text{初等行变换}} [R_{m\times n} \mid E_{m\times m}]$$

其中 E 是消元矩阵，根据矩阵乘法，满足 $EA = R$。在 R 的底部会出现 $m-r$ 个全零行，对应 E 中的 $m-r$ 个行向量。因为这些行向量与 A 相乘得到零向量，所以它们满足 $\mathbf{y}^T A = \mathbf{0}$。

- **基**：消元矩阵 E 中对应 R 底部 $m-r$ 个零行的行向量，构成左零空间的一组基。
- **维数**：$\dim(N(A^T)) = m - r$

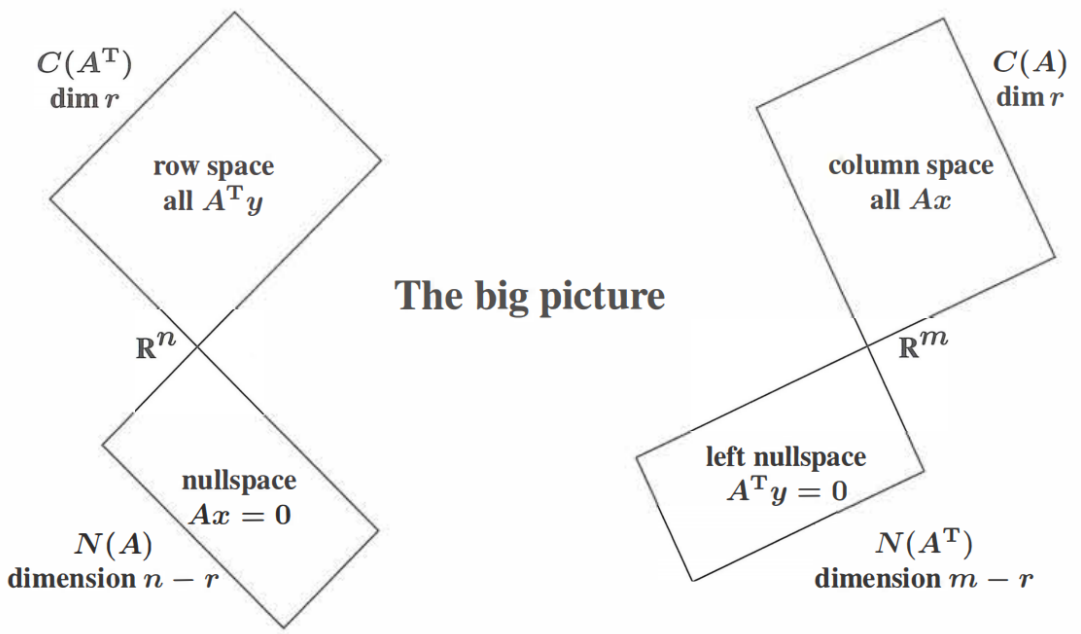

图 2: 四个基本子空间的维数

2 矩阵空间

除了由列向量构成的 $\mathbb{R}^n$ 空间之外，还可以将**矩阵自身**视为向量空间中的元素。所有 3×3 矩阵构成的集合记为 M，该集合对矩阵的加法和标量数乘封闭，因此 M 也是一个向量空间（其维数为 9）。

M 中包含一些重要的子空间：

- **上三角矩阵**（Upper Triangular Matrices）构成的空间。
- **对称矩阵**（Symmetric Matrices）构成的空间。
- **对角矩阵**（Diagonal Matrices）构成的空间。对角矩阵空间是上三角矩阵空间与对称矩阵空间的**交集**。

例如，所有 3×3 对角矩阵构成的空间维数为 3，其一组基由三个在单一对角位置为 1 的矩阵组成：

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

总结

本讲完整介绍了矩阵 A 的四个基本子空间：

- **列空间** $C(A)$ 和 **行空间** $C(A^T)$ 的维数均为矩阵的秩 r，分别位于 $\mathbb{R}^m$ 和 $\mathbb{R}^n$。
- **零空间** $N(A)$ 和 **左零空间** $N(A^T)$ 的维数分别为 $n - r$ 和 $m - r$，同样分别位于 $\mathbb{R}^n$ 和 $\mathbb{R}^m$。
- 行空间的基可以由行最简形 R 直接读出；左零空间的基可以通过消元矩阵 E 获得。
- 除了由列向量构成的空间外，还可以将矩阵视为向量空间中的元素。

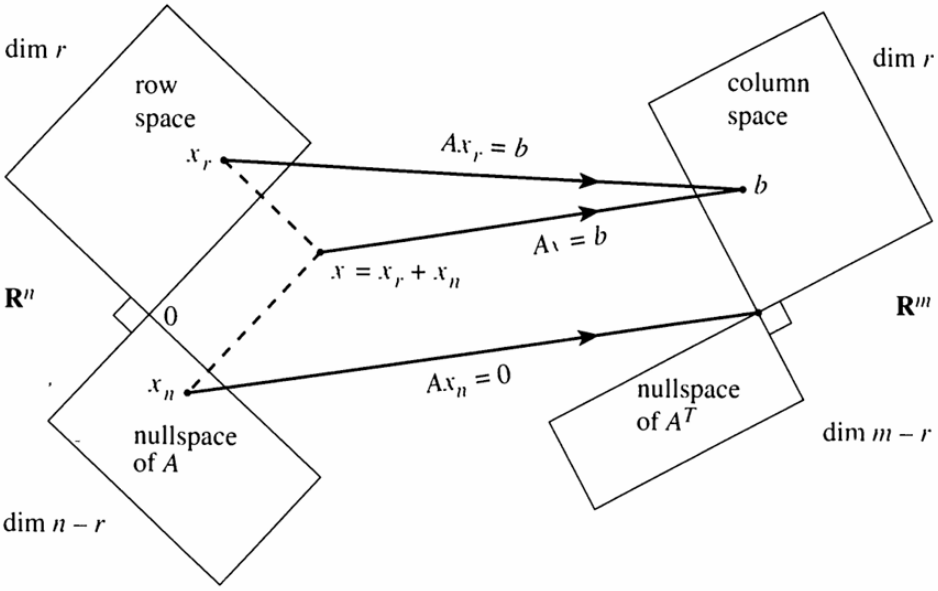
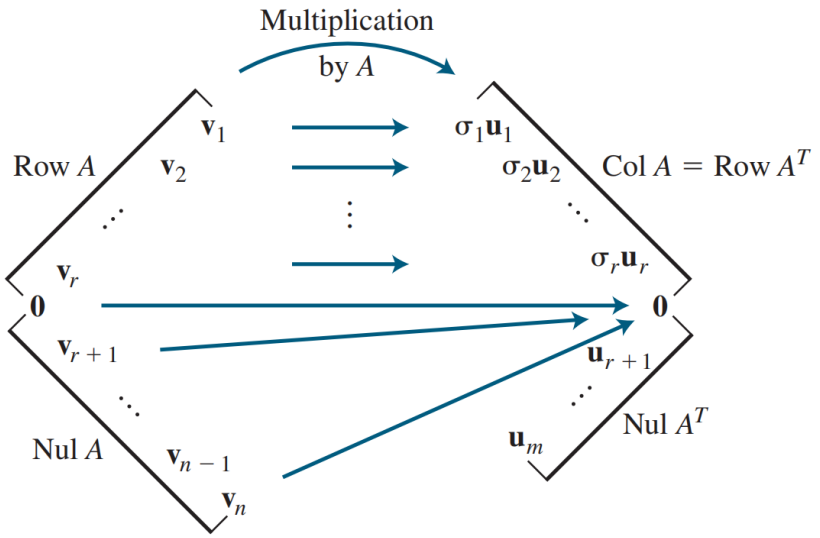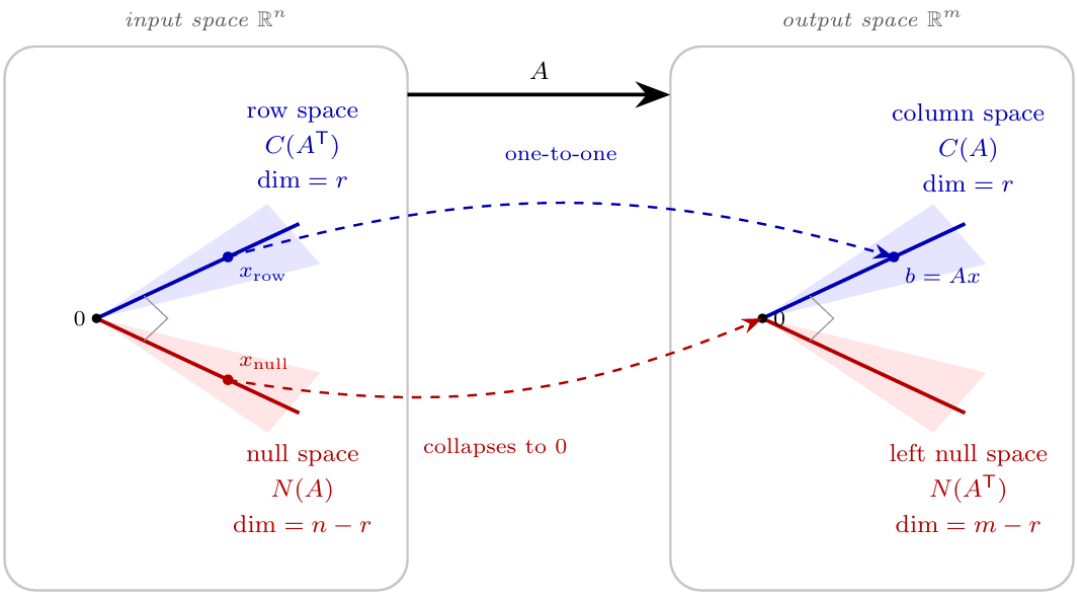
Figure 1. The action of A: Row space to column space, nullspace to zero.