

MIT 18.06 线性代数

第十一讲：矩阵空间、秩 1 矩阵

整理自 MIT 18.06 课程及相关公开笔记

引言

在上一讲中，我们已经将向量的概念扩展到了矩阵空间。本讲将系统地讨论这类新的向量空间——矩阵空间。此外，还将介绍微分方程的解空间、秩 1 矩阵的基本性质。

1 矩阵空间

1.1 矩阵空间的概念与维数

所有的 3×3 矩阵构成的集合可视为一个向量空间，记为 M 。该空间对矩阵加法和标量数乘封闭。选定空间中若干常用的子空间：

- **对称矩阵空间 S** ：所有 3×3 的对称矩阵构成的集合。
- **上三角矩阵空间 U** ：所有 3×3 的上三角矩阵构成的集合。
- **对角矩阵空间 D** ：即 S 与 U 的公共部分（交集），记为 $S \cap U$ 。

空间 M 的维数为 9，因为它类似于 $\mathbb{R}^9$ 空间，需要选定 9 个独立的参数来唯一确定一个 3×3 矩阵。 M 的一组标准基为 9 个在单个位置为 1、其余位置为 0 的矩阵。

1.2 子空间的基

- **对称矩阵空间 S** 的维数为 6。选定对角线上的 3 个元素和上三角部分的 3 个元素，下三角的元素即可由对称性确定。其一组基为：

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

- **上三角矩阵空间 U** 的维数也为 6。上三角部分共有 6 个可以自由取值的元素。其一组基为：

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

- **对角矩阵空间 D** 的维数为 3。其基即为上述两组基的交集的三个对角矩阵：

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

1.3 空间的并集与和集

若将 S 和 U 求并集 $S \cup U$ ，则并不构成子空间，这类似于在二维平面上两条过原点的直线求并集，其结果无法对线性运算封闭。若考虑由 S 中的任意元素和 U 中的任意元素做线性组合所构成的集合，记作和集 $S + U$ ，则 $S + U$ 恰好等于整个矩阵空间 M 。这些空间的维数满足如下关系：

$$\dim(S) + \dim(U) = \dim(S \cap U) + \dim(S + U)$$

代入具体数值： $6 + 6 = 3 + 9$ ，验证了该维数公式。

2 微分方程的解空间

向量空间的元素不仅可以是向量或矩阵，还可以是函数。以二阶常微分方程为例：

$$\frac{d^2 y}{dx^2} + y = 0$$

该方程在实数域内有两个线性无关的特解： $y = \cos x$ 与 $y = \sin x$ 。所有解构成的通解形式为 $y = c_1 \cos x + c_2 \sin x$ (c_1, c_2 为任意常数)。这个通解集合对函数的加法和数乘封闭，因此构成一个向量空间，称为解空间， $\cos x$ 与 $\sin x$ 即为该解空间的一组基，解空间的维数为 2。

3 秩 1 矩阵

3.1 秩 1 矩阵的构造

秩 1 矩阵 (Rank 1 Matrix) 是指列空间维数为 1 的矩阵。其重要性质是：任何一个秩 1 矩阵都可以分解为一个列向量与一个行向量的乘积，即 $A = \mathbf{u}\mathbf{v}^T$ 。例如：

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 5 \\ 2 & 8 & 10 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 4 & 5 \end{bmatrix}$$

这种分解形式便于理解，因为矩阵的每一行都是第一行的倍数。

3.2 秩 1 矩阵的作用

秩 1 矩阵的一个重要作用是可以作为构建复杂矩阵的“积木”。例如，一个秩为 4 的矩阵，可以通过 4 个秩 1 矩阵相加来构成。

$$A_{\text{rank } 4} = u_1 v_1^T + u_2 v_2^T + u_3 v_3^T + u_4 v_4^T$$

需要特别指出的是，空间中所有秩为 1 的矩阵所构成的集合**不是**一个子空间，原因在于对加法运算不封闭。根据矩阵秩的性质 $\text{rank}(A + B) \leq \text{rank}(A) + \text{rank}(B)$ ，两个秩 1 矩阵相加，其结果秩可能达到 2。

4 子空间构造示例

考察四维空间 $\mathbb{R}^4$ 中的一个向量 $\mathbf{v} = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \end{bmatrix}$ ，设集合 S 中的向量均满足 $v_1 + v_2 + v_3 + v_4 = 0$ 。

- S 显然包含零向量。
- 若向量 $\mathbf{v}, \mathbf{w}$ 均满足该方程，则它们的线性组合也必然满足该方程（加法和数乘封闭）。

因此， S 是一个子空间，这个子空间可以看作是由矩阵 $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ 确定的零空间 $N(A)$ 。因为 $\text{rank}(A) = 1$ ，故该零空间的维数为 $n - r = 4 - 1 = 3$ ，其对应的一组基为 $A\mathbf{x} = 0$ 的三个特解：

$$\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

同时可以观察到，矩阵 A 的列空间为 $\mathbb{R}^1$ ，其左零空间仅包含零向量，维数为 0。

总结

本讲展示了线性代数概念的延申：

- **矩阵空间** M (3×3) 及其子空间 S 、 U 、 D 拥有明确的维数和基，其交集与和集满足维数公式 $\dim(S) + \dim(U) = \dim(S \cap U) + \dim(S + U)$ 。
- **微分方程的解空间** 也是一个向量空间，如 $\cos x$ 和 $\sin x$ 构成了空间的基。
- **秩 1 矩阵** 可表示为 $\mathbf{u}\mathbf{v}^T$ ，它是构建高秩矩阵的基础。