

MIT 18.06 线性代数

第十二讲：网络、图论与矩阵

整理自 MIT 18.06 课程及相关公开笔记、Barabási 《Network Science》

引言

本讲展示了线性代数在经济学与社会网络分析 (Social Network Analysis) 中的重要作用。通过引入图 (Graph) 和网络 (Network) 的概念，构建其对应的关联矩阵 (Incidence Matrix)，可以清晰揭示社会关系的拓扑结构。此外，矩阵也在空间计量经济学中有着重要应用，旨在为读者构建一个跨学科的完整图论与线性代数知识框架。

1 第一部分：图论的历史与数学定义

1.1 哥尼斯堡七桥问题与图论的起源

图论的历史可以追溯到 1735 年。在当时的东普鲁士首都哥尼斯堡（现俄罗斯加里宁格勒），普雷格尔河穿城而过，河中心有两个小岛，由七座桥梁连接着河岸与小岛。当时的一个著名谜题是：**能否一次不重复地走过全部七座桥？**瑞士数学家欧拉于 1735 年给出了一个严谨的数学证明：这样的路径不存在。欧拉的证明开创性地将实际问题转化为数学图论问题：

1. 他将被河流分割的四块陆地抽象为四个**节点** (Nodes) ；
2. 将连接陆地的七座桥抽象为**边** (Edges) ；
3. 他构造出了一个包含 4 个节点和 7 条边的无向图。

欧拉接着做出了一个关键的观察：如果存在一条遍历所有边且不重复的路径，那么在路径中，除了起点和终点外，经过任何一个节点时，必须“进入”并“离开”该节点，这意味着连接该节点的边数（节点的度数）必须是偶数。因此，**含有奇数度数节点的图，要存在欧拉路径，则奇数度节点数必须为 0 或 2**。哥尼斯堡的图有 4 个节点，且度均为奇数（3、3、3、5），因此绝不可能存在这样的路径。这一证明首次将图作为解决数学问题的工具，标志着图论的诞生。

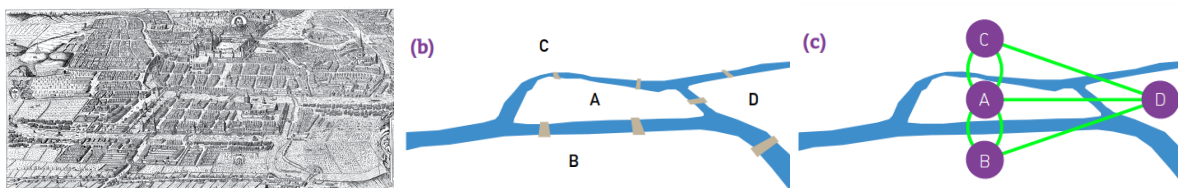


图 1: 哥尼斯堡七桥图

1.2 网络的一般定义与术语

在图论和网络科学中，一个**图** (Graph) 或**网络** (Network) 是由**节点** (Nodes/Vertices, 代表个人、城市、网页、蛋白质等系统组件) 和**边** (Links/Edges, 代表节点之间的互动关系) 组成的集合。

- **网络大小**: N 表示节点总数 (例如: 全 A 股上市公司数、专利总数)。
- **边数**: L 表示网络中关系的总数。
- **无向网络**: 边是互惠的, 不携带方向信息 (例如: 朋友关系、电力网络), 此时 $A_{ij} = A_{ji}$ 。
- **有向网络**: 边携带明确的方向 (例如: 网页的超链接、邮件发送者与接收者、资本流动), 此时 $A_{ij} \neq A_{ji}$ 。
- **加权网络**: 在实际系统中, 边的“强度”往往是不同的 (例如: 电话通话时长、贸易额、信任系数)。此类网络需使用**加权邻接矩阵**表示, 矩阵元素 $A_{ij} = w_{ij}$ 代表具体的权重值, 而不只是 0 或 1。

2 第二部分：图论的核心统计量与矩阵表示

2.1 基础网络模型

为了直观地演示图论中的无向与有向关系, 这里给出一个包含 3 个节点的基础网络图示例。

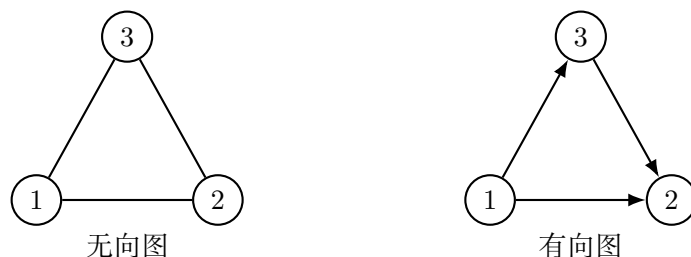


图 2: 基础网络模型：无向图与有向图

2.2 邻接矩阵 (Adjacency Matrix)

网络的矩阵表示用**邻接矩阵**。对于有 N 个节点的网络, 邻接矩阵 A 是一个 $N \times N$ 的方阵:

$$A_{ij} = \begin{cases} w_{ij} & \text{如果存在从节点 } j \text{ 到 } i \text{ 的连接} \\ 0 & \end{cases}$$

对于一个无权重的二元网络, 邻接矩阵中的元素仅有 0 和 1, 能够清晰地反映网络拓扑中任意两点是否存在直接联系。图 2 对应的邻接矩阵如下, 可以看到, 无向图对应的邻接矩阵是对称矩阵, 而有向图不是。

$$A_{\text{无向}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad A_{\text{有向}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

2.3 节点的度与度分布

节点的度 (Degree) k_i 衡量节点 i 与其他节点的连接数量。

1. **无向图的度**: 总边数 L 与度的关系为 $L = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N k_i$, 乘以 $1/2$ 是因为同一条边被两端的节点各计算了一次。
2. **有向图的度**: 分为**入度** $k_i^{\text{in}} = \sum_{j=1}^N A_{ij}$ (指向该节点的边) 和**出度** $k_i^{\text{out}} = \sum_{j=1}^N A_{ji}$ (由该节点发出的边)。此时 $L = \sum_{i=1}^N k_i^{\text{in}} = \sum_{i=1}^N k_i^{\text{out}}$ 。

度分布 (Degree Distribution) p_k 是网络科学中最核心的统计量, 它提供从网络中随机选取一个节点, 其度恰好为 k 的概率: $p_k = N_k/N$ 。实际应用中的自然和社会网络的度分布往往不是均匀的, 服从**无标度网络的幂律分布**, 意味着绝大多数的节点度数很小, 而极少数节点 (称为**枢纽 Hub**) 拥有极大的度数; 枢纽的存在对网络的稳健性和传播特性 (如流行病、金融风险扩散) 产生深远影响。

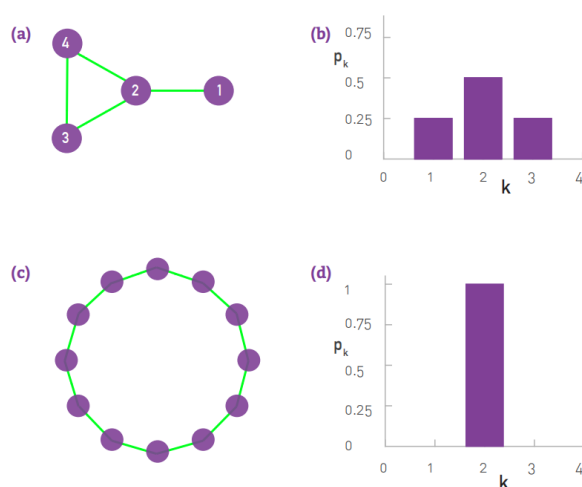
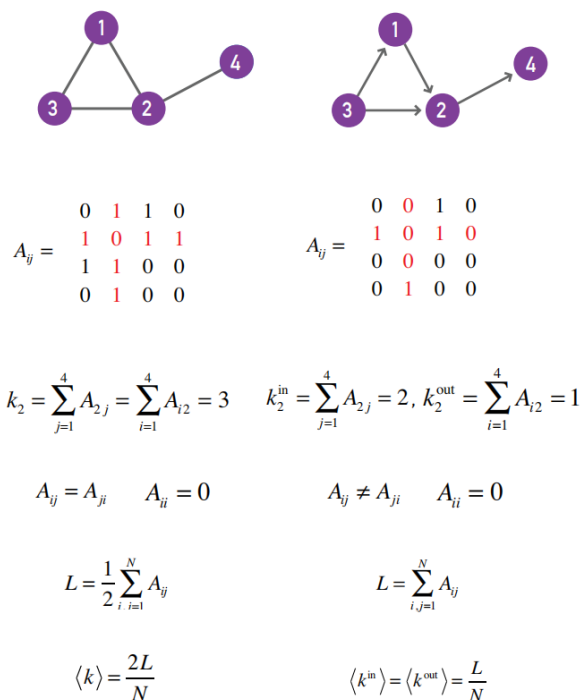


图 3: 度与度分布



3 第三部分：网络结构——路径、连通性与二分图

3.1 路径与距离

在网络中，两个节点之间的“距离”不是欧几里得空间中的物理距离，而是**最短路径**的长度 (Geodesic path)，即连接两个节点所经过的最小边数。

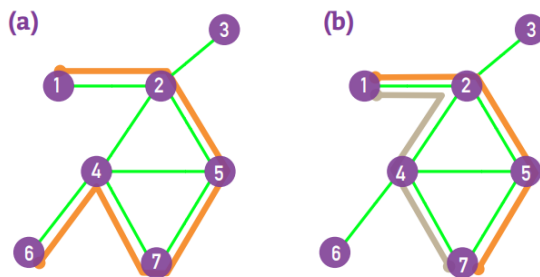
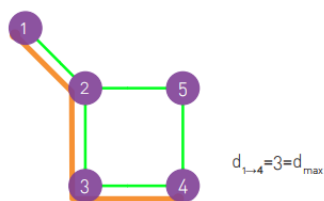


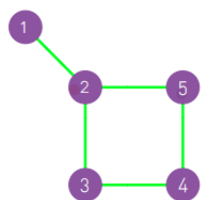
图 4: 网络路径

网络直径：网络中任意两个节点之间最短路径的最大值，刻画了网络信息传播的全局效率极限。



Diameter ($d_{\max}$)

The longest shortest path in a graph, or the distance between the two furthest nodes. In the graph shown here the diameter is between nodes 1 and 4, hence $d_{\max}=3$.



$$\langle d \rangle = [d_{1-2} + d_{1-3} + d_{1-4} + d_{1-5} + d_{2-3} + d_{2-4} + d_{2-5} + d_{3-4} + d_{3-5} + d_{4-5}] / 10 = 1.6$$

Average Path Length ($\langle d \rangle$)

The average of the shortest paths between all pairs of nodes. For the graph shown on the left we have $\langle d \rangle = 1.6$, whose calculation is shown next to the figure.

图 5: 网络直径与平均路径长度

通过邻接矩阵的幂运算可以求出路径数： A^2 的元素表示距离为 2 的路径数量；一般地， A^d 的元素表示距离为 d 的路径数量。

例如，对无向完全图 $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ ，有 $A^2 = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$ ， $A^3 = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 3 \\ 3 & 2 & 3 \\ 3 & 3 & 2 \end{bmatrix}$ 。

- $(A^2)_{11} = 2$ 表示从顶点 1 到自身的长度为 2 的路径有两条：1 → 2 → 1 和 1 → 3 → 1。
- $(A^3)_{12} = 3$ 表示从 1 到 2 的长度为 3 的路径有三条：1 → 2 → 1 → 2、1 → 2 → 3 → 2、1 → 3 → 1 → 2（中间可重复经过顶点）。

小世界现象：在现实中，尽管社会网络规模巨大（如全美 3 亿人），但任意两个人之间的最短路径长度往往非常小。著名的**六度分隔**（Six Degrees of Separation）理论：你和任何一个陌生人之间所间隔的人不会超过六个，最多通过六个人你就能够认识任何一个陌生人。

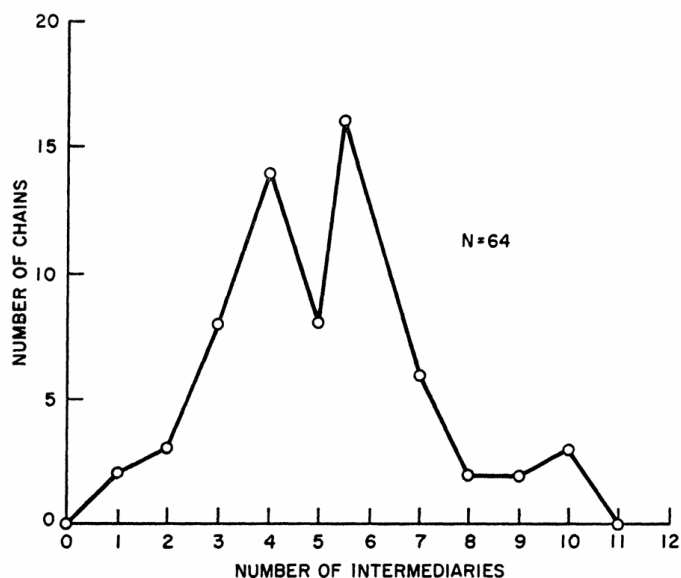


FIGURE 1

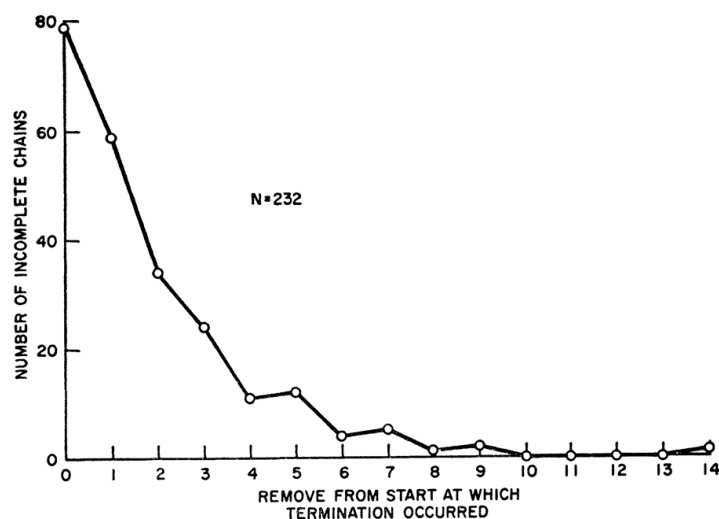


FIGURE 2

图 6: An Experimental Study of the Small World Problem

3.2 连通分量与图的欧拉公式

如果网络中存在至少一对节点之间无法建立路径，那么这个网络是**不连通**的。每一个相互连接的最大子集称为一个**连通分量** (Connected Components)。关于连通性，图论中有一个深刻的经典公式，即**欧拉公式** (Euler's Formula)，在网络科学中的广义形式为：

$$\text{节点数} - \text{边数} + \text{独立的闭合回路数} = 1$$

下图展示了网络的两个分量，并通过一条潜在的“桥”边展示了它们如何连通。

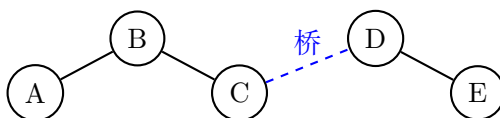


图 7: 网络分量与“桥”连接，虚线加入后网络变为单一连通分量

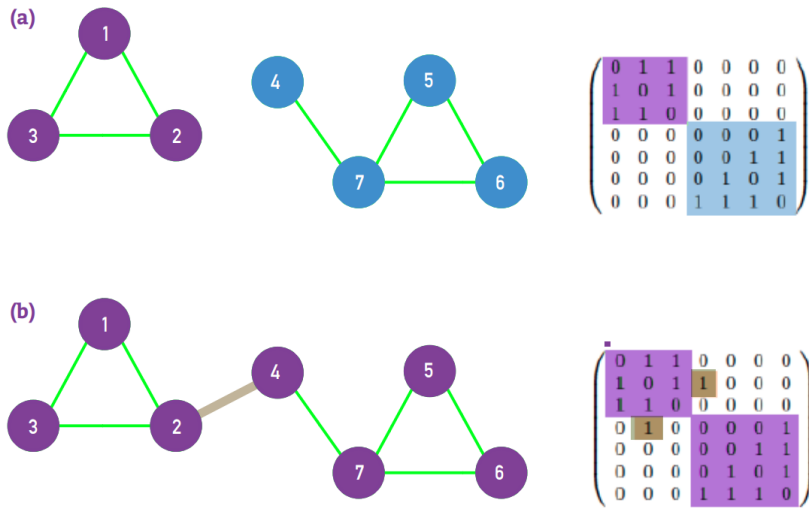


图 8: 连通网络与不连通网络

3.3 二分网络

网络科学中的**二分网络** (Bipartite Networks) 由两个截然不同的节点集合 U 和 V 组成，边只存在于集合 U 和集合 V 之间，同类节点内部不存在直接连线。在现实系统中，二分网络极为常见。在分析此类网络时，常常进行“投影”变换。例如，将两个演员连接起来，如果他们在同一部电影中共同出演，这便从二分图“投影”成了演员之间的社会网络（单模网络）。

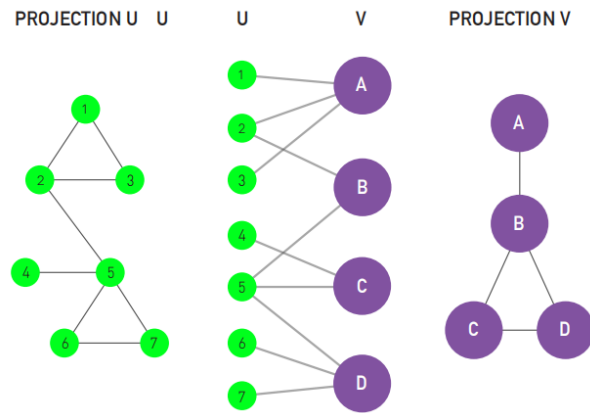


图 9: 二分网络

3.4 聚类系数

聚类系数 (Clustering Coefficient) 刻画了一个节点的邻居之间相互连接的程度，即社交网络中的“我的朋友也是朋友”现象（三元闭包，Triadic Closure）。在社会资本与信息传播的研究中，高聚类系数通常意味着“强连接”的小圈子。在这样的圈层中，信息传播速度快、信任程度高，但也可能导致信息同质化（回声室效应），阻碍外部创新信息的进入。

对于一个度为 k_i 的节点 i ，其**局部聚类系数** (Local Clustering Coefficient) 定义为节点 i 的 k_i 个邻居之间实际存在的边数 L_i 与这些邻居之间可能存在的最大边数之比：

$$C_i = \frac{2L_i}{k_i(k_i - 1)}, \quad (0 \leq C_i \leq 1)$$

其中：

- 若 $C_i = 0$ ，说明该节点的邻居之间没有任何联系，彼此孤立。
- 若 $C_i = 1$ ，说明该节点的邻居彼此之间形成了一个完全图（即所有邻居两两相连）。

度量整张网络的聚类程度，通常使用**平均聚类系数**（Average Clustering Coefficient），即对所有节点的局部聚类系数求平均值：

$$\langle C \rangle = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N C_i$$

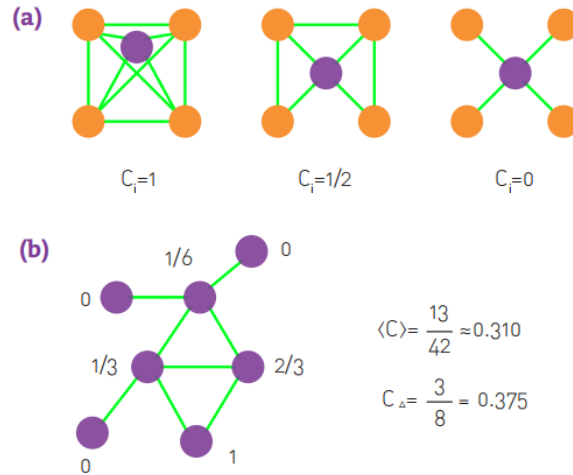


图 10: 不同连接状态下的局部聚类系数和平均聚类系数

4 第四部分：关联矩阵

4.1 关联矩阵的构造规则

假设一个网络（有向图）包含 n 个节点（社会行动者）和 m 条边（社会关系或信息渠道），关联矩阵 A 是一个 $m \times n$ 的矩阵。构造规则：

- **每一行**：代表一条有向关系。
- **每一列**：代表一个行动者节点。
- **矩阵元素**：如果一条边从节点 a 指向节点 b ，则该行的第 a 列元素为 -1 ，第 b 列元素为 1 ，其余位置为 0 。

例如，一个包含 4 个节点、5 条边的网络图：

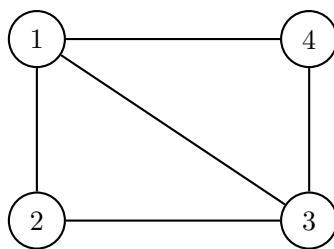


图 11: 包含 4 个节点和 5 条边的无向图

为每条边指定一个正方向（例如信息流的方向），可以得到一个有向图：

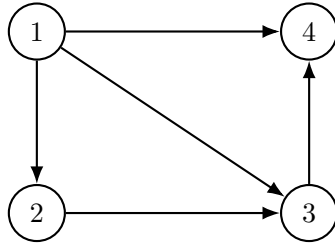


图 12: 带有方向性的图

其关联矩阵 (Incidence Matrix) 为：

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

这种矩阵往往非常稀疏，大部分元素为 0，反映了真实网络局部连接的本质。

4.2 关联矩阵的零空间 $N(A)$

将向量 $\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix}$ 定义为每个节点上的一种属性，计算 $A\mathbf{x}$ ，结果是一个 m 维向量：

$$A\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_2 - x_1 \\ x_3 - x_2 \\ x_3 - x_1 \\ x_4 - x_1 \\ x_4 - x_3 \end{bmatrix}$$

$A\mathbf{x}$ 的每一个分量恰好等于该条关系两端的属性差。考察零空间方程 $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ ，解为 $\mathbf{x} = c \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}^T$ 。

网络科学解释：零空间社会网络层面表达了“共识”或“均衡”状态，即网络中两端的社会距离完全消失，所有节点达成一致。若要确定绝对意见值，需要引入“边界条件”，例如：设定行动者 4 为意见领袖，令 $x_4 = 0$ ；零空间的维数 r 为 1， $n - r = 3$ 代表系统可以在其他三个维度上有自由变化，即自由度/自由变量。

4.3 关联矩阵的左零空间 $N(A^\top)$

将向量 $\mathbf{y} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \\ y_5 \end{bmatrix}$ 定义为每条关系边上的信息流。考察左零空间方程 $A^\top \mathbf{y} = \mathbf{0}$ ，展开矩阵运算，得到四个方程，分别对应四个节点（流入等于流出）：

$$\text{节点 1: } -y_1 - y_3 - y_4 = 0$$

$$\text{节点 2: } y_1 - y_2 = 0$$

$$\text{节点 3: } y_2 + y_3 - y_5 = 0$$

$$\text{节点 4: } y_4 + y_5 = 0$$

网络科学解释：这是网络中流（信息、资本、影响力等）的**守恒定律**。对上述方程求解，可得到两个线性无关的基向量。它们对应着网络中的两个独立**社会回路/闭环**：节点 1-2-3 的循环圈和节点 1-3-4 的循环圈。左零空间的维数 $m - r$ 直接给出了网络中“小圈子”的个数。

4.4 欧拉公式

根据矩阵的秩与网络结构的关系：

- 矩阵的秩 r 等于网络中“树”（不包含任何回路的极大连通子图）的边数，即 $r = n - 1 = 3$ 。
- 零空间的维数 $n - r = 1$ ，对应着网络中全部节点的等属性状态。
- 左零空间的维数 $m - r = 5 - 3 = 2$ ，对应着网络中独立回路的个数。

因此，欧拉公式在矩阵层面的数学表达：**回路的数量 = 边的数量 - 节点的数量 + 1**。

4.5 拉普拉斯矩阵方程

若在关联矩阵的基础上引入一个对角权重矩阵 C ，以表示各边在不同关系中的权重（例如信任程度、亲密度或传播速度），可以构建：

$$\mathbf{y} = C(A\mathbf{x})$$

将上述关系代入信息流守恒方程 $A^\top \mathbf{y} = \mathbf{f}$ 中，可以推导出著名的网络均衡矩阵方程：

$$A^\top C A \mathbf{x} = \mathbf{f}$$

这里的 $A^\top C A$ 被称为**拉普拉斯矩阵** (Laplacian Matrix)。该方程在社会网络意见动力学分析中，用于推算在外部影响力 $\mathbf{f}$ 作用下，网络中各个节点的最终稳态意见分布。

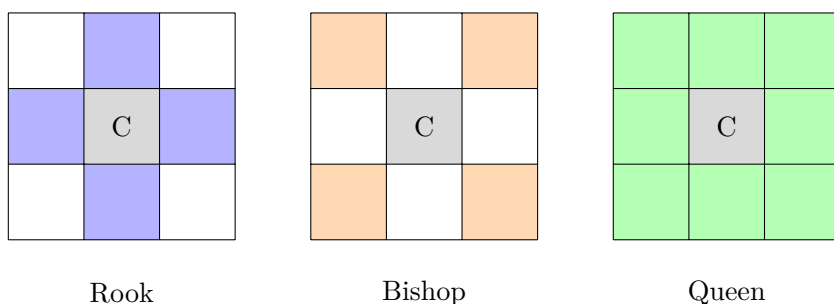
5 第五部分：空间计量经济学中的空间权重矩阵

空间计量经济学研究经济单元之间的空间依赖性与溢出效应，它高度依赖邻接矩阵概念的扩展。

5.1 空间权重矩阵 W_n 的构造

在空间计量经济学中，核心的工具是**空间权重矩阵** (Spatial Weight Matrix)，记为 W_n 。空间权重矩阵的构造主要有以下几种方式：

1. **基于地理邻接**：在实际的经济数据分析中，常用“车”邻接 (Rook, 共享边)、“象”邻接 (Bishop, 共享顶点) 和“王后”邻接 (Queen, 共享边或顶点) 来定义地理空间上的邻接关系。



对于 3×3 的网格，编号顺序为从左到右、从上到下依次为 1-9，其中 5 号单元为中心区域 C 。

2. **基于物理距离**：利用节点间的中心点距离 d_{ij} 来计算，采用 $w_{ij} = 1/d_{ij}^\alpha$ (幂函数距离) 或 $w_{ij} = \exp(-\alpha d_{ij})$ (指数距离)，使得远距离区域间的空间影响随着距离增加而逐渐衰减。
3. **基于社会经济距离**：基于经济特征的距离权重 $w_{ij} = 1/|x_i - x_j|$ ，其中 x_i 可以是人均收入、教育水平、R&D 经费投入等经济特征变量，这意味着经济距离越近的区域，相互影响越强。

在具体建模中，为了满足统计性质，通常要求空间权重矩阵的**对角线元素为 0** (即 $w_{ii} = 0$ ，同地域不对自身产生影响)，并经常对其进行**行归一化** (Row Normalization)，使得每一行的元素之和为 1。这一操作的数学实质是构造了一个“邻居特征的加权平均”算子。

车邻接 (Rook, 共享边)

只考虑上下左右四个方向的邻接关系：

$$W_{\text{Rook}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

象邻接 (Bishop, 共享顶点)

只考虑四个对角方向的邻接关系:

$$W_{\text{Bishop}} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

后邻接 (Queen, 共享边或顶点)

考虑周围全部 8 个格子的邻接关系 (Rook + Bishop 的并集):

$$W_{\text{Queen}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

5.2 空间自回归模型

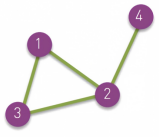
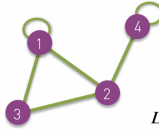
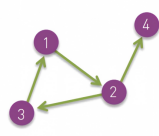
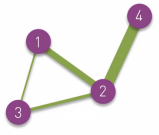
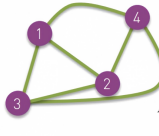
经典的空间自回归模型 (Spatial Lag Model, SAR) 在传统线性回归基础上引入了空间滞后项:

$$Y_n = \rho W_n Y_n + X_n \beta + U_n$$

其中, Y_n 为 n 个区域的经济变量, X_n 为自变量矩阵, $W_n Y_n$ 表示所有邻居区域经济变量的加权平均, 反映了同群效应和空间传染, ρ 是空间自回归系数, 用于衡量空间溢出效应的强度和方向。

总结

- 从图论基础出发, 掌握了网络的数学定义、邻接矩阵与关联矩阵的构造。
- 深入分析了关联矩阵的四大子空间。零空间 $N(A)$ 代表信息传播中的意见均衡; 左零空间 $N(A^\top)$ 代表网络流守恒与信息闭环; 欧拉公式在矩阵中的维数体现是拓扑结构的数学本质。
- 通过引入拉普拉斯矩阵方程 $A^\top C A x = f$, 该方程对社会网络中节点意见的最终均衡状态给出了精确的数学描述。
- 延伸至空间计量经济学, 展示了图论中邻接矩阵、空间依赖与溢出效应等概念, 如何构造空间权重矩阵 W_n 以及空间自回归模型 $Y = \rho W Y + X \beta + U$, 从而广泛应用于量化空间溢出效应与区域经济互动。

(a)	Undirected  $A_{ij} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ $A_{ii} = 0 \quad A_{ij} = A_{ji}$ $L = \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^N A_{ij} \quad \langle k \rangle = \frac{2L}{N}$	Undirected Network A network whose links do not have a defined direction. Examples: Internet, power grid, science collaboration networks.
(b)	Self-loops  $A_{ij} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ $\exists i, A_{ii} \neq 0 \quad A_{ij} = A_{ji}$ $L = \frac{1}{2} \sum_{i,j=1, i \neq j}^N A_{ij} + \sum_{i=1}^N A_{ii} \quad ?$	Self-loops In many networks nodes do not interact with themselves, so the diagonal elements of the adjacency matrix are zero, $A_{ii} = 0, i = 1, \dots, N$. In some systems self-interactions are allowed; in such networks, self-loops represent the fact that node i interacts with itself. Examples: WWW, protein interactions.
(c)	Multigraph (undirected)  $A_{ij} = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ $A_{ii} = 0 \quad A_{ij} = A_{ji}$ $L = \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^N A_{ij} \quad \langle k \rangle = \frac{2L}{N}$	Multigraph/Simple Graphs In a multigraph nodes are permitted to have multiple links (or parallel links) between them. Hence A_{ii} can be any positive integer. Networks that do not allow multiple links are called <i>simple</i>. Multigraph Examples: Social networks, where we distinguish friendship, family and professional ties.
(d)	Directed  $A_{ij} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ $A_{ij} \neq A_{ji}$ $L = \sum_{i,j=1}^N A_{ij} \quad \langle k \rangle = \frac{L}{N}$	Directed Network A network whose links have selected directions. Examples: WWW, mobile phone calls, citation network.
(e)	Weighted (undirected)  $A_{ij} = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0.5 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 4 \\ 0.5 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ $A_{ii} = 0 \quad A_{ij} = A_{ji}$ $\langle k \rangle = \frac{2L}{N}$	Weighted Network A network whose links have a defined weight, strength or flow parameter. The elements of the adjacency matrix are $A_{ij} = w_{ij}$ if there is a link with weight w_{ij} between them. For unweighted (binary) networks, the adjacency matrix only indicates the presence ($A_{ij} = 1$) or the absence ($A_{ij} = 0$) of a link. Examples: Mobile phone calls, email network.
(f)	Complete Graph (undirected)  $A_{ij} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ $A_{ii} = 0 \quad A_{i \neq j} = 1$ $L = L_{\max} = \frac{N(N-1)}{2} \quad \langle k \rangle = N-1$	Complete Graph (Clique) In a complete graph, or a clique, all nodes are connected to each other. Examples: Actors in the cast of the same movie, as they are all linked to each other in the actor network.