

MIT 18.06 线性代数

第十八、十九讲：行列式

整理自 MIT 18.06 课程及相关公开笔记

引言

本讲进入线性代数课程的第二大部分，重点讨论**方阵**的性质。**行列式** (Determinant) 是与任何方阵相关联的一个标量数值，它浓缩了矩阵的大量关键信息，例如：矩阵是否可逆、体积缩放因子、以及后续特征值的乘积等。本讲先通过三大基本性质定义行列式，并推导出其余性质与计算公式。

1 行列式及其性质

1.1 行列式的基本定义

方阵 A 的行列式记作 $\det(A)$ 或 $|A|$ 。行列式的值是否为 0，直接决定了方阵 A 是否为奇异矩阵（不可逆矩阵）。行列式的定义基于以下三条核心性质（作为公理）：

1.1.1 基本性质

性质 1（单位阵的行列式）：单位矩阵 I 的行列式等于 1。

$$|I| = 1$$

性质 2（行交换变号）：交换矩阵的两行，行列式的值取反。

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} c & d \\ a & b \end{vmatrix}$$

- 由此可知，置换矩阵 P 的行列式为 1（偶数次交换）或 -1 （奇数次交换）。

性质 3（行线性性质）：

- (a) **数乘性质：**将矩阵的某一行乘以标量 t ，行列式变为原来的 t 倍。

$$\begin{vmatrix} ta & tb \\ c & d \end{vmatrix} = t \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$$

- (b) **按行拆分性质：**若一行由两个向量相加构成，可以拆分为两个行列式之和：

$$\begin{vmatrix} a + a' & b + b' \\ c & d \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a' & b' \\ c & d \end{vmatrix}$$

注：行列式满足的是“行线性”，而不是全局线性，即 $|A + B| \neq |A| + |B|$ 。

1.1.2 推导性质

利用上述三条基本性质，可以推导出以下 7 条重要性质：

性质 4 (两行相同)：若矩阵有两行完全相同，则行列式为 0。

$$\begin{vmatrix} a & b \\ a & b \end{vmatrix} = 0$$

证明：交换这两行，矩阵不变，但根据性质 2 行列式应取反，只有 0 能满足 $|A| = -|A|$ 。

性质 5 (行消元)：将矩阵的某一行加上或减去另一行的倍数，行列式的值不发生改变。

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c+ta & d+tb \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a & b \\ ta & tb \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} + 0 = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$$

性质 6 (零行)：若矩阵有一行全为 0，则行列式为 0。

$$\begin{vmatrix} a & b \\ 0 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

证明：由性质 3(a) 取 $t = 0$ 即可得到。

性质 7 (三角矩阵)：上三角矩阵或下三角矩阵的行列式，等于其对角线元素（即主元）的乘积。

$$|U| = \begin{vmatrix} d_1 & * & \cdots & * \\ 0 & d_2 & \cdots & * \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & d_n \end{vmatrix} = d_1 d_2 \cdots d_n = \prod_{i=1}^n d_i$$

证明思路：利用性质 5 将非对角线元素通过消元化为 0，得到对角阵。再利用性质 3(a) 提取每行的常数因子，最后利用性质 1 得到对角线乘积。

性质 8 (可逆性)：当且仅当矩阵 A 为可逆矩阵（满秩）时，其行列式不为 0。

$$|A| \neq 0 \iff A \text{ 可逆/非奇异}$$

证明思路：如果 A 不可逆，消元后必出现全零行，由性质 6 知行列式为 0；若可逆，则可化简为无零行的上三角矩阵，由性质 7 知对角线（主元）乘积不为 0。

1.2 矩阵运算对行列式的影响

性质 9 (矩阵乘法)：矩阵乘积的行列式等于矩阵行列式的乘积。

$$|AB| = |A| \cdot |B|$$

由此可推导出以下推论：

1. 可逆矩阵的逆矩阵的行列式等于原矩阵行列式的倒数：

$$|A|^{-1} = \frac{1}{|A|} \quad (\text{由 } AA^{-1} = I \text{ 及 } |A||A|^{-1} = 1 \text{ 可得})$$

2. 矩阵平方的行列式等于行列式的平方：

$$|A^2| = |A|^2$$

3. 常数倍数的矩阵 (n 阶方阵):

$$|kA| = k^n |A|$$

性质 10 (转置矩阵): 矩阵转置后, 行列式不变。

$$|A^T| = |A|$$

证明思路: 可将 A 分解为 LU , 利用性质 9 及三角阵的性质 $|L| = |L^T| = 1$ 和 $|U| = |U^T|$ 证明。性质 10 使得前 9 条性质均可自然地推广到列向量上 (例如: 交换两列行列式变号; 提取列公因子等)。

1.3 补充性质

(注: 部分性质涉及后续章节概念, 在此补充列出, 当掌握相关概念后即可直接使用。)

1. 若 λ_i 是 A 的特征值, 则:

$$|A| = \prod_{i=1}^n \lambda_i \quad (1)$$

2. 若 $A \sim B$ (相似矩阵), 则:

$$|A| = |B| \quad (2)$$

3. 若 A 可逆, 则 $r(A) = n$, 且方程 $Ax = 0$ 无非零解, 列向量线性无关:

$$|A| \neq 0 \iff A \text{ 可逆} \iff r(A) = n \iff Ax = 0 \text{ 无非零解} \quad (3)$$

4. 反对角线 (副对角线) 矩阵的行列式计算公式 (n 阶):

$$\begin{vmatrix} 0 & \cdots & 0 & a_{1n} \\ 0 & \cdots & a_{2,n-1} & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & 0 & 0 \end{vmatrix} = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} a_{1n} a_{2,n-1} \cdots a_{n1} \quad (4)$$

2 行列式公式

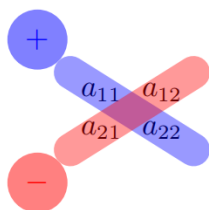
利用基本性质中的第 3 条 (线性拆分性质), 可以逐步将任意矩阵的行列式拆分为许多个仅包含单一非零元素的行列式之和。对于 n 阶矩阵而言, 所有非零的拆分项总共有 $n!$ 个。这些非零项的特点是在原矩阵的每一行和每一列中都恰好选取一个元素进行乘积, 如同置换矩阵中元素的位置分布。

2.1 行列式公式 (Big Formula)

利用性质 3 (行线性), 可以将二阶行列式展开为 2^2 项:

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} &= \begin{vmatrix} a & 0 \\ c & d \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 & b \\ c & d \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} a & 0 \\ c & 0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a & 0 \\ 0 & d \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 & b \\ c & 0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 & b \\ 0 & d \end{vmatrix} \\ &= 0 + ad - bc + 0 \\ &= ad - bc \end{aligned}$$

这个公式可以以如下对角线法则表示：



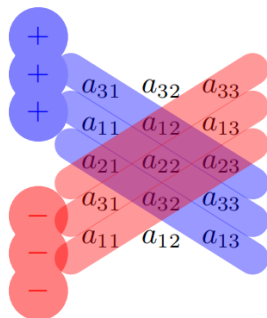
2.2 推广

对于二阶行列式，从一个拆分为两个，然后再拆分成四个。而对于三阶矩阵，从一个拆分成三个，然后拆分成九个，最后要拆分成二十七个，但最终这些行列式中有很大部分等于 0。

三阶行列式的详细拆分与化简过程如下：

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & 0 & 0 \\ 0 & a_{22} & 0 \\ 0 & 0 & a_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_{23} \\ 0 & a_{32} & 0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 & a_{12} & 0 \\ a_{21} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_{33} \end{vmatrix} \\
 + \begin{vmatrix} 0 & a_{12} & 0 \\ 0 & 0 & a_{23} \\ a_{31} & 0 & 0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 & 0 & a_{13} \\ a_{21} & 0 & 0 \\ 0 & a_{32} & 0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 & 0 & a_{13} \\ 0 & a_{22} & 0 \\ a_{31} & 0 & 0 \end{vmatrix} \\
 = a_{11}a_{22}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31}$$

每一个拆分出来的非 0 行列式都是在每行每列都有且只有一个元素。这个公式可以以如下对角线法则表示：



推广到 n 阶矩阵，行列式的公式为所有非零项（类似于置换矩阵分布形式）的求和：

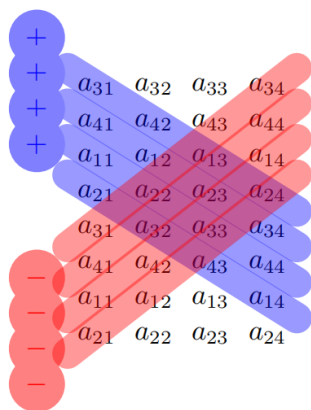
$$|A| = \sum_{n! \text{ terms}} \pm a_{1\alpha} a_{2\beta} a_{3\gamma} \cdots a_{n\omega}$$

其中 $(\alpha, \beta, \gamma, \dots, \omega)$ 是 $(1, 2, 3, \dots, n)$ 的一个置换。每一项的符号由置换的逆序数决定，更精确地：

$$|A| = \sum_{(j_1, j_2, \dots, j_n)} (-1)^{\tau(j_1, j_2, \dots, j_n)} a_{1j_1} a_{2j_2} \cdots a_{nj_n}$$

式中 $\tau(j_1, j_2, \dots, j_n)$ 表示该置换的逆序数 *（奇数次行交换为负，偶数次为正）。

注意：对于拆分得到的三阶矩阵，元素从上至下朝向右侧方向的，其行列式的数值为正，朝向左侧方向的则为负，但是这个规律只适用于三阶矩阵，不适用于高阶矩阵。一个看起来很自然的对角线法的推广如下：



但是这样的对角线法只能包含 8 项，而四阶行列式有 24 项，因此使用该方法计算四阶以上行列式会缺失大部分项，同时，我们还可以验证使用该方法还会弄错每一项的符号。因此，对于四阶以上的行列式，我们只能使用行列式的性质简化成二阶或三阶的行列式计算，不宜使用对角线法。

2.3 代数余子式与按行（列）展开

余子式 M_{ij} 表示删去原矩阵第 i 行、第 j 列后，剩下的元素组成的 $n-1$ 阶方阵的行列式。

代数余子式 C_{ij} 定义为：

$$C_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}$$

符号规律分布：当 $i+j$ 为偶数时为正，奇数时为负。

按行（列）展开公式：

$$\text{沿第 } i \text{ 行展开 } |A| = \sum_{j=1}^n a_{ij} C_{ij} \quad (i = 1, 2, \dots, n)$$

$$\text{沿第 } j \text{ 列展开 } |A| = \sum_{i=1}^n a_{ij} C_{ij} \quad (j = 1, 2, \dots, n)$$

2.4 常用特殊矩阵行列式公式

- 分块矩阵（拉普拉斯展开）：若 A 和 B 分别是 m 阶和 n 阶方阵，则：

$$\begin{vmatrix} A & * \\ 0 & B \end{vmatrix} = |A| \cdot |B|, \quad \begin{vmatrix} 0 & A \\ B & * \end{vmatrix} = |A| \cdot |B| \cdot (-1)^{mn} \quad (5)$$

- 范德蒙德行列式：

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ x_1 & x_2 & \cdots & x_n \\ x_1^2 & x_2^2 & \cdots & x_n^2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_1^{n-1} & x_2^{n-1} & \cdots & x_n^{n-1} \end{vmatrix} = \prod_{1 \leq j < i \leq n} (x_i - x_j) \quad (6)$$

- 三对角矩阵：对一个由全 1 构成的三对角矩阵 $A_4 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$,

计算前几阶的行列式：

$$|\mathbf{A}_1| = 1, \quad |\mathbf{A}_2| = 0, \quad |\mathbf{A}_3| = -1$$

利用代数余子式按第一行展开可以推出递推关系式：

$$|\mathbf{A}_n| = |\mathbf{A}_{n-1}| - |\mathbf{A}_{n-2}|$$

证明： 设 n 阶全 1 三对角矩阵为：

$$\mathbf{A}_n = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix}_{n \times n}$$

对上述矩阵按第一行进行展开：

$$|\mathbf{A}_n| = a_{11}C_{11} + a_{12}C_{12} + a_{13}C_{13} + \cdots + a_{1n}C_{1n}$$

由于矩阵中除了最左侧两列为非零元素外，其余列的元素 $a_{1j} = 0$ ($j \geq 3$)，因此仅保留前两项：

$$|\mathbf{A}_n| = 1 \cdot C_{11} + 1 \cdot C_{12}$$

接下来分别计算两个代数余子式的值：

1. 根据代数余子式的定义， $C_{11} = (-1)^{1+1}|\mathbf{M}_{11}|$ 。划去原矩阵的第 1 行和第 1 列后，剩余的部分恰好是一个 $n-1$ 阶的全 1 三对角矩阵 $\mathbf{A}_{n-1}$ 。因此：

$$C_{11} = |\mathbf{A}_{n-1}|$$

2. $C_{12} = (-1)^{1+2}|\mathbf{M}_{12}| = -|\mathbf{M}_{12}|$ 。 $\mathbf{M}_{12}$ 是划去第 1 行和第 2 列后得到的 $n-1$ 阶矩阵：

$$\mathbf{M}_{12} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 1 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix}_{(n-1) \times (n-1)}$$

对 $\mathbf{M}_{12}$ 按第一列展开。由于第一列中只有第一个元素为 1，其余全为 0，所以：

$$|\mathbf{M}_{12}| = 1 \cdot |\mathbf{A}_{n-2}| = |\mathbf{A}_{n-2}|$$

代入可得：

$$C_{12} = -|\mathbf{A}_{n-2}|$$

将上述两部分结果代回最初的展开式中，可得递推公式：

$$|\mathbf{A}_n| = |\mathbf{A}_{n-1}| - |\mathbf{A}_{n-2}|$$

证毕。

这揭示了三对角矩阵行列式的取值严格按照 n 呈现周期性循环。结合前几个初始条件 $|\mathbf{A}_1| = 1$ 与 $|\mathbf{A}_2| = 0$ ，可以求出该矩阵的行列式序列为：1, 0, -1, -1, 0, 1; 1, 0, -1, -1, 0, 1; ...，数列循环周期为 6。

总结

第 18 讲与第 19 讲完整覆盖了行列式的计算技巧与理论判定：

- 行列式的十条基本性质是推导所有求解方法的根基。计算机求解大型矩阵的行列式，核心仍然是利用性质 5 和性质 7，即通过消元得到上三角矩阵后求主元乘积。
- 大公式 (Big Formula) 给出了行列式的解析定义，即对所有 $n!$ 种排列按符号求和，这也为代数余子式的降阶展开提供了理论依据。
- 代数余子式展开是介于完全展开和消元法之间的有效手算工具，特别适用于具有稀疏结构（如三对角矩阵）或含有较多零元素的特殊矩阵。