

# MIT 18.06 线性代数

## 第二讲：矩阵消元

整理自 MIT 18.06 课程及相关公开笔记

### 引言

消元法 (Elimination) 是计算机软件求解线性方程组  $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$  时最常用的方法。只要系数矩阵  $A$  是可逆的，我们就能够通过系统化的消元步骤将复杂的方程组转化为简易的三角方程组，并最终求出解。本讲的核心在于理解消元的具体过程，并将这些行变换操作用**消元矩阵**进行数学化表达，同时引入逆矩阵与置换矩阵的概念。

## 1 消元法与回代求解

### 1.1 消元法介绍

对于一个“好”的系数矩阵（可逆矩阵） $A$ ，我们通过将不同行的方程进行加法和减法运算，逐步消去未知数。以下面方程组为例：

$$\begin{cases} x + 2y + z = 2 \\ 3x + 8y + z = 12 \\ 4y + z = 2 \end{cases} \implies A\mathbf{x} = \mathbf{b}, \quad A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 8 & 1 \\ 0 & 4 & 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 2 \\ 12 \\ 2 \end{bmatrix}$$

步骤 1: **寻找第一个主元**：矩阵左上角的 1 是第一个主元 (Pivot)。目标是将第一列中除了主元以外的元素（即  $a_{21} = 3$ ）消为 0：将第二行减去第一行的 3 倍。

步骤 2: **寻找第二个主元**：此时矩阵右下角剩余部分为  $\begin{bmatrix} 2 & -2 \\ 4 & 1 \end{bmatrix}$ ，左上角的 2 成为第二个主元；将第三行减去第二行的 2 倍。

步骤 3: **得到第三个主元**：经过上述操作，第三行只剩下元素 5，此即第三个主元。

最终，系数矩阵  $A$  被消元为一个上三角矩阵 (Upper Triangular Matrix)，记为  $U$ ：

$$U = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}$$

注意：主元位置不能为 0。如果在消元过程中主元位置恰好为 0，则需要进行“行交换”（换行）操作，找一个非零数作为主元。若下方所有行在对应位置皆为 0，说明矩阵不可逆，方程组无唯一解。

## 1.2 回代求解

在实际手工计算中，我们常将向量  $\mathbf{b}$  拼接到矩阵  $A$  的右侧，构成增广矩阵  $[A | \mathbf{b}]$ ，对增广矩阵进行同样的行变换，即带着  $\mathbf{b}$  一起消元：

$$\left[ \begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 2 \\ 3 & 8 & 1 & 12 \\ 0 & 4 & 1 & 2 \end{array} \right] \rightarrow \left[ \begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & -2 & 6 \\ 0 & 4 & 1 & 2 \end{array} \right] \rightarrow \left[ \begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & -2 & 6 \\ 0 & 0 & 5 & -10 \end{array} \right]$$

消元后，原方程  $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$  转化为新方程  $U\mathbf{x} = \mathbf{c}$ ，其中  $\mathbf{c} = \begin{bmatrix} 2 \\ 6 \\ -10 \end{bmatrix}$ 。此时可以通过从下往上的回代过程轻松求出解：

- 由第三行  $5z = -10$ ，得  $z = -2$ 。
- 代入第二行  $2y - 2z = 6$ ，得  $y = 1$ 。
- 代入第一行  $x + 2y + z = 2$ ，得  $x = 2$ 。

## 2 消元矩阵

### 2.1 行向量与矩阵的乘法

在上一讲中我们已知，矩阵右乘列向量相当于对矩阵的列进行线性组合。同样地，矩阵左乘行向量，则等价于对矩阵的行向量进行线性组合。例如：

$$\begin{bmatrix} -3 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 8 & 1 \\ 0 & 4 & 1 \end{bmatrix} = -3 \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \end{bmatrix} + 1 \begin{bmatrix} 3 & 8 & 1 \end{bmatrix} + 0 \begin{bmatrix} 0 & 4 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 2 & -2 \end{bmatrix}$$

这说明，我们可以用左乘矩阵的方式来表达行变换操作。

### 2.2 初等消元矩阵的构造

所谓消元矩阵，就是将消元过程中的行变换转化为矩阵乘法。我们可以从单位阵  $I$  出发，对  $I$  进行相同的行变换来得到消元矩阵：

- **消元矩阵  $E_{21}$** ：要将矩阵  $A$  的  $(2, 1)$  位置变为 0，即第二行减去第一行的 3 倍。对单位阵  $I$  的第二行做同样操作，得到：

$$E_{21} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \text{且满足 } E_{21}A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & -2 \\ 0 & 4 & 1 \end{bmatrix}$$

- **消元矩阵  $E_{32}$** ：要将上述结果矩阵的  $(3, 2)$  位置变为 0，即第三行减去第二行的 2 倍。其对应的消元矩阵为：

$$E_{32} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \end{bmatrix}$$

根据矩阵乘法的结合律，整个消元过程可表示为：

$$E_{32}(E_{21}A) = U \quad \text{或写成} \quad (E_{32}E_{21})A = U$$

记  $E = E_{32}E_{21}$ ，则  $E$  就是此消元过程的总消元矩阵，满足  $EA = U$ 。

### 3 置换矩阵与行列变换

#### 3.1 行变换与列变换

矩阵的**左乘**等同于对矩阵进行**行变换**，而矩阵的**右乘**则等同于对矩阵进行**列变换**。能够实现行交换操作的矩阵称为**置换矩阵** (Permutation Matrix)，它是由单位阵  $I$  经行交换得到的。

例如，交换  $2 \times 2$  矩阵的第一行和第二行，其对应的置换矩阵  $P$  为：

$$P = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

左乘  $P$  交换行（行变换）：

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c & d \\ a & b \end{bmatrix}$$

右乘  $P$  交换列（列变换）：

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b & a \\ d & c \end{bmatrix}$$

值得注意的是，矩阵乘法一般不满足交换律，即  $PA \neq AP$ 。因此，在进行矩阵运算时，必须严格区分左乘（行操作）与右乘（列操作）。

#### 3.2 三阶置换矩阵

对于三阶矩阵，若需要交换第 1 行与第 3 行，对应的置换矩阵  $P_{13}$  为：

$$P_{13} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad P_{13}A = \begin{bmatrix} a_{31} & a_{32} & a_{33} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{11} & a_{12} & a_{13} \end{bmatrix}$$

同理，交换第 1 行与第 2 行对应的置换矩阵为  $P_{12} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ 。

### 4 逆矩阵初探

既然消元矩阵  $E$  代表着对矩阵  $A$  施加一系列的变换，那么必然存在一个反向操作可以“撤销”这些变换，从而将矩阵  $U$  还原为  $A$ 。这个反向操作对应的矩阵就是消元矩阵的**逆矩阵** (Inverse)。

例如，对  $E_{21}$  而言，其作用是第二行减去第一行的 3 倍。撤销这一操作需要第二行加上第一行的 3 倍。因此， $E_{21}$  的逆矩阵为：

$$E_{21}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

逆矩阵满足基本性质：

$$E_{21}^{-1}E_{21} = I$$

其中  $I$  为单位阵。同理，对于整个消元过程，我们也可以通过逆矩阵将上三角矩阵  $U$  还原为原始矩阵  $A$ ，即  $E_{21}^{-1}E_{32}^{-1}U = A$ 。

## 总结

- 高斯消元法通过对增广矩阵  $[A \mid \mathbf{b}]$  进行行变换，将系数矩阵  $A$  化简为上三角矩阵  $U$ ，再结合回代过程求解方程组。
- 消元矩阵（初等矩阵）是将行变换操作用矩阵乘法形式表达的重要工具。通过对单位阵  $I$  执行相应的行变换，我们可以直接写出该步骤的消元矩阵。
- 矩阵的左乘与右乘对应着不同的操作：左乘对应行变换，右乘对应列变换。置换矩阵是行交换操作的标准矩阵形式。
- 逆矩阵是消元过程的逆运算，满足  $E^{-1}E = I$ 。这一概念不仅为消元提供了“可逆”的理论支撑，也为后续研究矩阵分解（如 LU 分解）奠定了基础。