

MIT 18.06 线性代数

第二十七讲：二次型的几何意义

整理自 MIT 18.06 课程及相关公开笔记

引言

本讲将重点讨论正定矩阵。同时，通过引入二次型与函数的图像，可以将矩阵的正定性与微积分中极值的判定联系起来，从几何角度理解正定矩阵的意义。

1 半正定与非正定

1.1 临界状态：半正定矩阵

考虑一个含有参数 y 的对称矩阵：

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 6 \\ 6 & y \end{bmatrix}$$

根据顺序主子式判定法，该矩阵为正定矩阵的条件是 $2y - 36 > 0$ ，即 $y > 18$ 。

当正好 $y = 18$ 时，矩阵的行列式为 0，它处于正定的边界上。此时矩阵只有一个非零主元 2，特征值分别为 0 和 20。这样的矩阵被称为半正定矩阵（Positive Semidefinite Matrix）。

该半正定矩阵对应的二次型：

$$\mathbf{x}^T A \mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 6 \\ 6 & 18 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = 2x_1^2 + 12x_1x_2 + 18x_2^2$$

通过配方可以将其表示为完全平方：

$$2x_1^2 + 12x_1x_2 + 18x_2^2 = 2(x_1 + 3x_2)^2$$

当 $x_1 = 3, x_2 = -1$ 时，该表达式等于 0，说明半正定矩阵允许二次型在某些非零向量上取到零值，但永远不可能取负值。

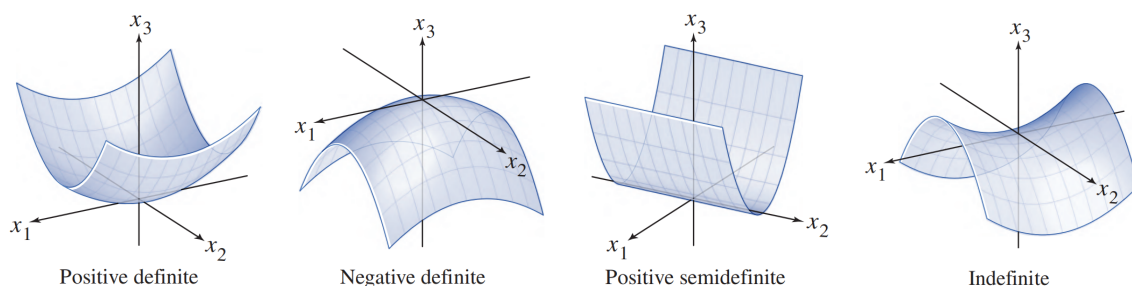


图 1: 正定、负定、半正定、不定

1.2 非正定矩阵与鞍面

当 y 的值小于临界值，例如取 $y = 7$ 时，矩阵 $A = \begin{bmatrix} 2 & 6 \\ 6 & 7 \end{bmatrix}$ 不再是正定矩阵，对应的二次型为：

$$f(x, y) = 2x^2 + 12xy + 7y^2$$

配方后可得：

$$f(x, y) = 2(x + 3y)^2 - 11y^2$$

由于配方后第二项带有负号，这表明该函数在某些区域可以取到负值。该函数图像在原点处呈现一个马鞍形，被称为鞍面（Saddle Surface）；原点是函数的一个鞍点（Saddle Point），它在一个方向上是极大值，在另一个方向上是极小值。

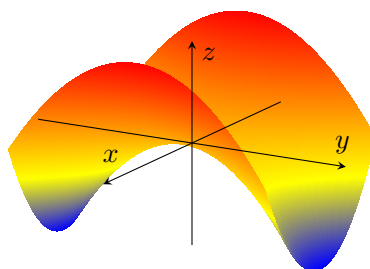


图 2: 马鞍面

1.3 正定矩阵与抛物面

当 $y = 20$ 时，矩阵 $A = \begin{bmatrix} 2 & 6 \\ 6 & 20 \end{bmatrix}$ 满足正定判定条件（顺序主子式为 2 和 4，均大于 0），其二次型为：

$$f(x, y) = 2x^2 + 12xy + 20y^2$$

再次使用配方法：

$$f(x, y) = 2(x + 3y)^2 + 2y^2$$

由于配方后的平方项系数均为正，该二次型对于任何非零的 (x, y) 取值恒大于 0。该函数的图像呈现为一个开口向上的抛物面。在原点处，其一阶偏导数为零，二阶偏导数的矩阵正定，因此原点是该函数的最小值点。

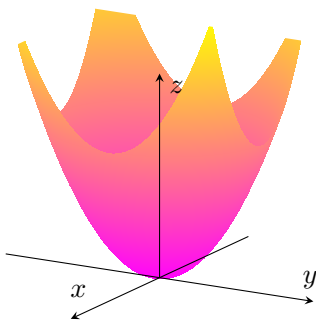


图 3: 开口向上的抛物面

2 配方法与主元的关系

通过配方法可以发现，配方后平方项外的系数正好就是矩阵经过高斯消元后得到的主元。以正定矩阵 $A = \begin{bmatrix} 2 & 6 \\ 6 & 20 \end{bmatrix}$ 为例：

$$\begin{bmatrix} 2 & 6 \\ 6 & 20 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

对应的配方为：

$$f(x, y) = 2(x + 3y)^2 + 2y^2$$

这表明，主元就是配方后各个完全平方项的系数，若所有主元均为正，则二次型必然恒为正。这与微积分中通过求二阶导数判断极值的方法是一致的。

3 海赛矩阵与极值判定

在微积分中，对于一个二元函数 $f(x, y)$ ，其二阶导数矩阵（海赛矩阵，Hessian Matrix）定义为：

$$H = \begin{bmatrix} f_{xx} & f_{xy} \\ f_{yx} & f_{yy} \end{bmatrix}$$

根据混合偏导数的性质， $f_{xy} = f_{yx}$ ，因此海赛矩阵是一个对称矩阵。当该矩阵是正定矩阵时，意味着其行列式 $f_{xx}f_{yy} - f_{xy}^2 > 0$ ，这与微积分中二阶偏导数极值判定条件 $f_{xx}f_{yy} > f_{xy}^2$ 对应，这一判定方法可以自然推广到 n 元函数。

4 二次型的几何意义

4.1 推广至椭球

给定一个三阶矩阵：

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{bmatrix}$$

计算其顺序主子式可得： $|2| = 2 > 0$ ， $\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = 3 > 0$ ， $\begin{vmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{vmatrix} = 4 > 0$ 。主元分别为 2， $3/2$ 和 $4/3$ ，均大于 0。特征值为 $2 - \sqrt{2}$ ， 2 ， $2 + \sqrt{2}$ ，均为正数。因此，该矩阵是一个正定矩阵。

对应的二次型为：

$$f(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^T A \mathbf{x} = 2x_1^2 + 2x_2^2 + 2x_3^2 - 2x_1x_2 - 2x_2x_3$$

若令 $f(\mathbf{x}) = 1$ ，该方程在三维空间中描绘出一个椭球体（Ellipsoid）。根据主轴定理，实对称矩阵 A 可以被正交对角化为 $A = Q\Lambda Q^T$ 。

- 特征向量矩阵 Q 的列方向即是椭球体三根主轴的方向。
- 特征值 λ_i 决定了各主轴的长度，椭球体三根半轴的长度分别为 $1/\sqrt{\lambda_i}$ 。

4.2 二次型与二次曲面的标准型

通过谱定理（主轴定理），可以将任意实二次型 $\mathbf{x}^T A \mathbf{x}$ 通过正交变换 $A = Q \Lambda Q^T$ 化为标准型 $\lambda_1 y_1^2 + \lambda_2 y_2^2 + \cdots + \lambda_n y_n^2$ 。根据对称矩阵 A 的特征值 λ_i 的符号分布（正、负、零），三维空间中的二次曲面 $f(\mathbf{x}) = 1$ 或 $f(\mathbf{x}) = z$ 可以严格地划分为正定、半正定、不定三类。

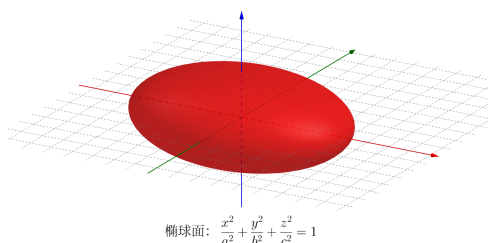
4.2.1 正定矩阵对应的二次曲面

当对称矩阵 A 的所有特征值均为正数 ($\lambda_i > 0$) 时，对应的二次曲面是封闭的，或开口向上。

- **椭球面**：标准型为 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$ 。

对应的二次型矩阵为对角矩阵 $\text{diag}(\frac{1}{a^2}, \frac{1}{b^2}, \frac{1}{c^2})$ ，三个特征值均为正。

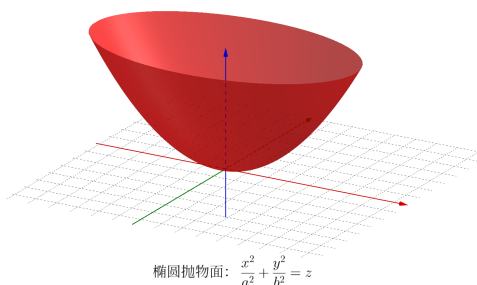
特殊地，当 $a = b = c$ 时，该椭球面退化为球面。



- **椭圆抛物面**：标准型为 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 2pz$ ($p > 0$)。

在齐次坐标下视为二次型 $x^2/a^2 + y^2/b^2 - 2pz = 0$ ，其对应的二次型矩阵为
$$\begin{bmatrix} 1/a^2 & 0 & 0 \\ 0 & 1/b^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}。$$

其非零特征值均为正，配合常数项 z 的线性存在，图像呈现开口向上的碗状曲面。

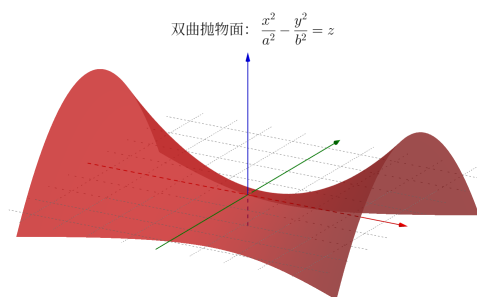


4.2.2 不定矩阵对应的二次曲面

当对称矩阵的特征值同时存在正数和负数时，对应的二次曲面通常具有鞍点特征，或在某方向上开口朝下。

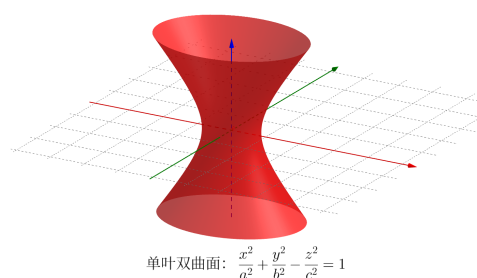
- **双曲抛物面（鞍面）**：标准型为 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 2pz$ ($p \neq 0$)。

特征值符号为一正一负（如 $\frac{1}{a^2} > 0, -\frac{1}{b^2} < 0$ ），二次型矩阵为不定矩阵。几何上呈现出典型的“马鞍”形状，原点为鞍点。



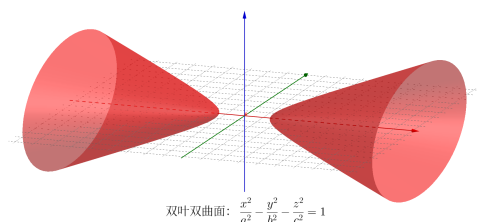
- **单叶双曲面**: 标准型为 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$ 。

对应的对称矩阵为 $\text{diag}(1/a^2, 1/b^2, -1/c^2)$, 特征值符号为两正一负。几何上表现为一个沿 z 轴方向联通的“漏斗”状曲面。



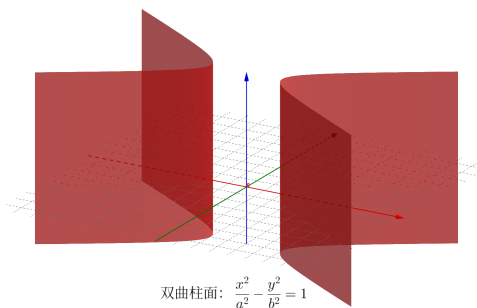
- **双叶双曲面**: 标准型为 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = -1$ 。

等效地可写成 $-\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$, 特征值符号为两负一正。几何上表现为上下两片开口相对的曲面。



- **双曲柱面**: 标准型为 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ 。

由于不含 z 项, 矩阵为 $\begin{bmatrix} 1/a^2 & 0 \\ 0 & -1/b^2 \end{bmatrix}$, 特征值一正一负。图像沿 z 轴方向无限延伸。

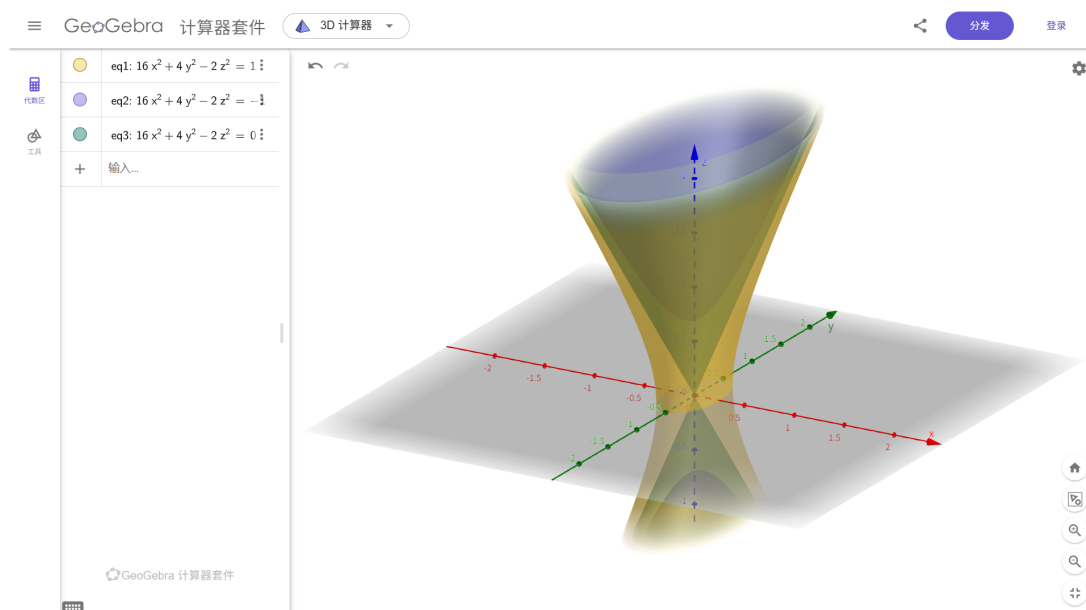
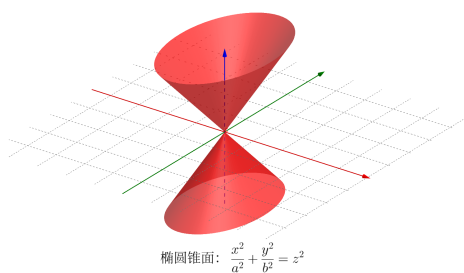


4.2.3 半正定矩阵对应的二次曲面

当对称矩阵的特征值出现零（即行列式为 0 或消元后主元为 0）时，二次曲面对应在某个坐标方向上“退化”为柱面或锥面。半正定矩阵的特征值均大于等于 0。

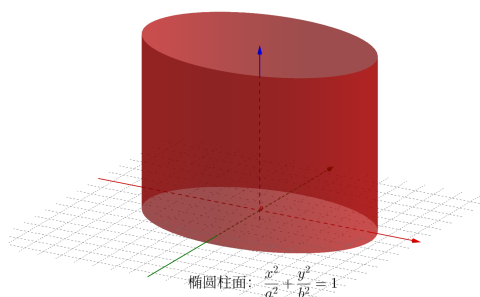
- **椭圆锥面**：标准型为 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = z^2$ 。

将其写成二次型形式 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - z^2 = 0$ ，矩阵为 $\text{diag}(\frac{1}{a^2}, \frac{1}{b^2}, -1)$ ，对应一个特征值为负、两个为正的定矩阵。它是单叶双曲面与双叶双曲面退化的分界线。



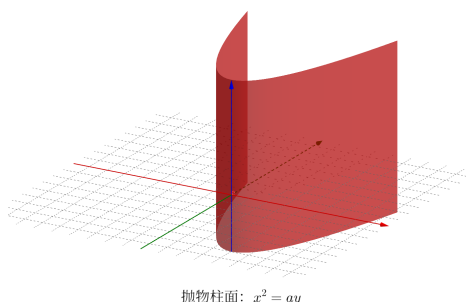
- **椭圆柱面**：标准型为 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ 。

二次型矩阵为 $\begin{bmatrix} 1/a^2 & 0 \\ 0 & 1/b^2 \end{bmatrix}$ ，特征值均为正（在主变量方向），而对应 z 轴的维度特征值为 0。矩阵对线性空间失去了“满秩”的约束。



- **抛物柱面**：标准型为 $y^2 = 2px$ ($p > 0$)。

在三维空间内，方程不依赖 z 坐标，矩阵退化，几何表现为一个抛物面沿 z 轴无限平移得到的槽状曲面。



小结 通过分析二次型对应的对称矩阵，可以快速判断二次曲面的类型：

- 矩阵**正定**（所有特征值 > 0 ）→ 封闭椭球面或向上的椭圆抛物面；
- 矩阵**不定**（特征值异号）→ 双曲型曲面（鞍面、双曲面）；
- 矩阵**半正定**（特征值含 0）→ 柱面、锥面等退化曲面。



(a) A satellite dish reflects signals to the focus of a paraboloid.



(b) Nuclear reactors have cooling towers in the shape of hyperboloids.



(c) Gears in the shape of hyperboloids mesh and rotate along skew axes.

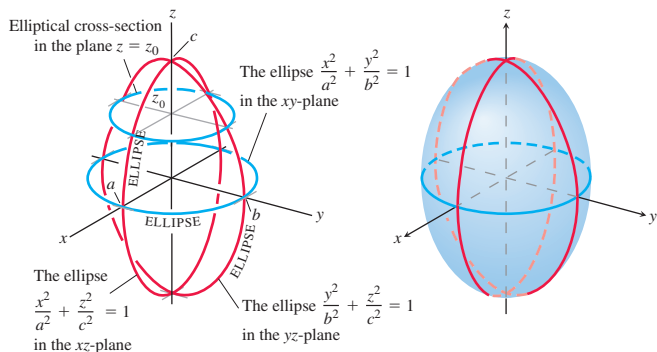
图 4: 二次曲面的应用

总结

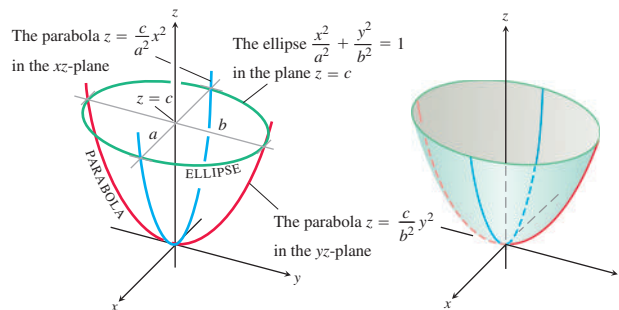
本讲将矩阵的代数性质与几何图形、微积分应用紧密联系起来：

- **正定矩阵**的特征值、主元、顺序主子式均为正数，其对应的二次型恒大于零。
- **半正定矩阵**在边界上具有特征值 0，允许二次型在非零向量上为零，但不会取负值。
- 矩阵的正定性可直接用于判定函数是否具有最小值。微积分中的二阶偏导数极值判据等价于海赛矩阵是正定矩阵。
- 在几何上，对称矩阵的正交对角化揭示了椭圆形（或椭球体）各主轴的方向与半轴长度。

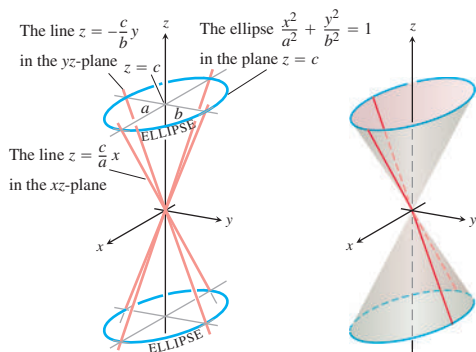
TABLE 12.1 Graphs of Quadric Surfaces


ELLIPSOID

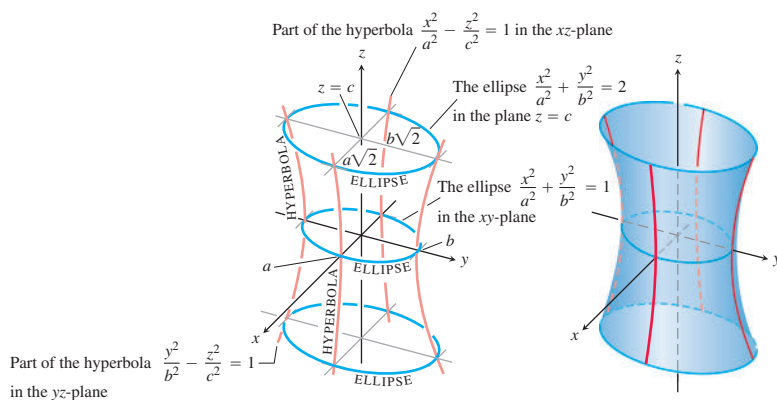
$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$


ELLIPTICAL PARABOLOID

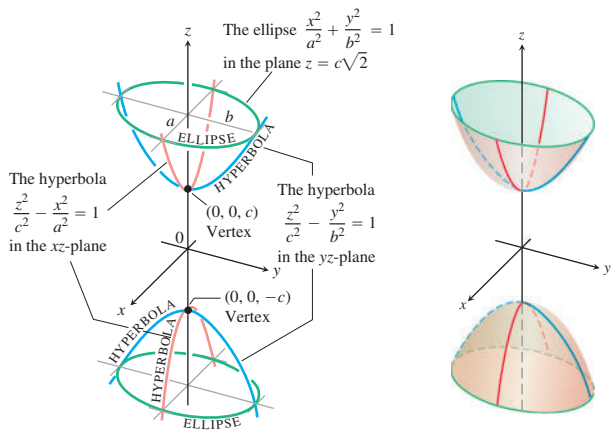
$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = \frac{z}{c}$$


ELLIPTICAL CONE

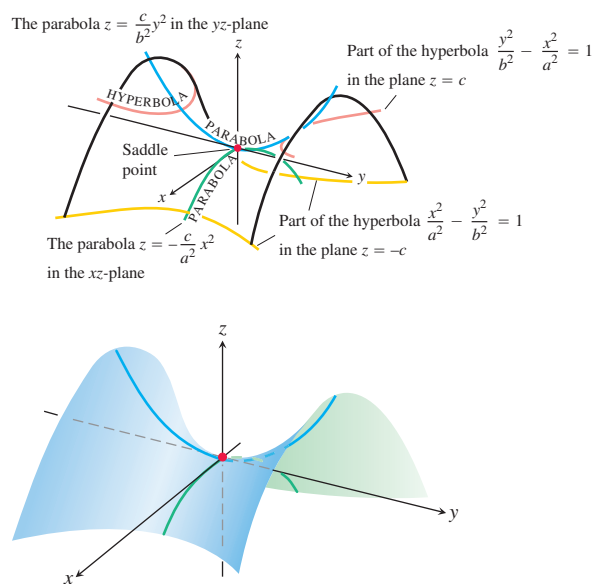
$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = \frac{z^2}{c^2}$$


HYPERBOLOID OF ONE SHEET

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$$


HYPERBOLOID OF TWO SHEETS

$$\frac{z^2}{c^2} - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$


HYPERBOLIC PARABOLOID

$$\frac{y^2}{b^2} - \frac{x^2}{a^2} = \frac{z}{c}, c > 0$$