

MIT 18.06 线性代数

第三十讲：线性变换与矩阵的几何意义

整理自 MIT 18.06 课程及相关公开笔记

引言

本讲将视角从具体的矩阵运算转向更抽象的 **线性变换** (Linear Transformation)。线性变换是矩阵运算的几何与代数本质，而矩阵则是线性变换在选定基下的坐标表示。理解两者的关系，有助于从整体上把握矩阵的几何意义，也为理解相似矩阵与基变换提供了理论基础。

1 线性变换

1.1 定义与反例

如果一个变换 T 满足以下两条性质，则称它为线性变换：

1. **加法性**：对于任意向量 $\mathbf{v}, \mathbf{w}$ ，有 $T(\mathbf{v} + \mathbf{w}) = T(\mathbf{v}) + T(\mathbf{w})$ 。
2. **齐次性**：对于任意向量 $\mathbf{v}$ 和标量 c ，有 $T(c\mathbf{v}) = cT(\mathbf{v})$ 。

等价地，可以将这两条性质合并为一条：对于任意向量 $\mathbf{v}, \mathbf{w}$ 和标量 c, d ，有：

$$T(c\mathbf{v} + d\mathbf{w}) = cT(\mathbf{v}) + dT(\mathbf{w})$$

重要推论：线性变换必须满足 $T(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$ 。例如，如果 $T(\mathbf{v}) = \mathbf{v} + \mathbf{v}_0$ (平移变换)，由于 $T(\mathbf{0}) = \mathbf{v}_0 \neq \mathbf{0}$ ，因此它一定不是线性变换。再如求向量长度 ($T(\mathbf{v}) = \|\mathbf{v}\|$)，虽然该变换满足 $T(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$ ，但当 $c < 0$ 时， $T(c\mathbf{v}) = \|c\mathbf{v}\| = |c|\|\mathbf{v}\| \neq c\|\mathbf{v}\|$ ，因此它也不是线性变换。

1.2 与基、坐标的关系

要确定一个线性变换 T 对所有向量 $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$ 的作用，只需知道输入空间中一组基的变换结果。设输入空间的一组基为 $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_n$ ，对于输入空间中的任意向量：

$$\mathbf{v} = c_1\mathbf{v}_1 + c_2\mathbf{v}_2 + \dots + c_n\mathbf{v}_n$$

根据线性性质：

$$T(\mathbf{v}) = c_1T(\mathbf{v}_1) + c_2T(\mathbf{v}_2) + \dots + c_nT(\mathbf{v}_n)$$

因此，只要知道 $T(\mathbf{v}_1), T(\mathbf{v}_2), \dots, T(\mathbf{v}_n)$ ，就能推出任意向量的变换结果。

在给定基后，向量可以用基向量的线性组合系数来表示，这组系数即为该向量在该基下的坐标。

2 线性变换对应的矩阵

2.1 矩阵构造

给定线性变换 $T: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ ，选定输入空间基 $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n$ 和输出空间基 $\mathbf{w}_1, \dots, \mathbf{w}_m$ 。要构造矩阵 A ，只需将每个输入基向量的变换结果表示为输出基向量的线性组合：

$$T(\mathbf{v}_1) = a_{11}\mathbf{w}_1 + a_{21}\mathbf{w}_2 + \dots + a_{m1}\mathbf{w}_m$$

$$T(\mathbf{v}_2) = a_{12}\mathbf{w}_1 + a_{22}\mathbf{w}_2 + \dots + a_{m2}\mathbf{w}_m$$

$$\vdots$$

$$T(\mathbf{v}_n) = a_{1n}\mathbf{w}_1 + a_{2n}\mathbf{w}_2 + \dots + a_{mn}\mathbf{w}_m$$

矩阵 A 的第 i 列即为 $T(\mathbf{v}_i)$ 在输出基下的坐标向量：

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

当输入向量的坐标为 $\mathbf{x}$ 时，输出坐标即为 $A\mathbf{x}$ 。

2.2 示例：求导变换

设线性变换 $T = \frac{d}{dx}$ ，它作用于二次多项式：

$$T(c_1 + c_2x + c_3x^2) = c_2 + 2c_3x$$

输入空间为二次多项式空间，基为 $\mathbf{v}_1 = 1, \mathbf{v}_2 = x, \mathbf{v}_3 = x^2$ ；输出空间为一次多项式空间，基为 $\mathbf{w}_1 = 1, \mathbf{w}_2 = x$ 。计算基向量的变换：

$$T(\mathbf{v}_1) = 0 = 0 \cdot \mathbf{w}_1 + 0 \cdot \mathbf{w}_2$$

$$T(\mathbf{v}_2) = 1 = 1 \cdot \mathbf{w}_1 + 0 \cdot \mathbf{w}_2$$

$$T(\mathbf{v}_3) = 2x = 0 \cdot \mathbf{w}_1 + 2 \cdot \mathbf{w}_2$$

因此，该线性变换对应的矩阵为： $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$ ，验证可知： $A \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_2 \\ 2c_3 \end{bmatrix}$ 。

3 几类特殊的矩阵变换与几何直观

在实际应用中，许多常见的几何操作都可以用简单的二阶矩阵来表示，这些是最直观的线性变换。下面逐一介绍它们的矩阵形式与几何意义。

3.1 恒等变换

定义：使平面内任意一点都保持不变的变换。

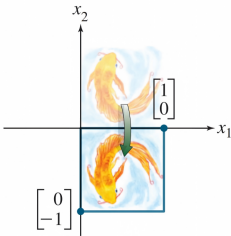
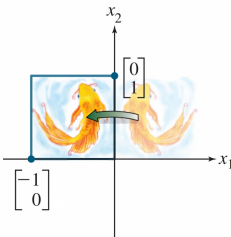
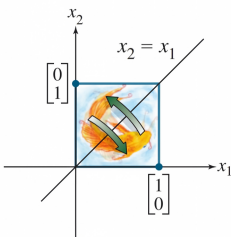
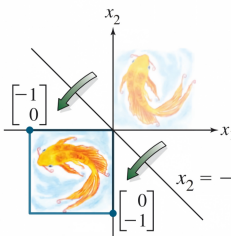
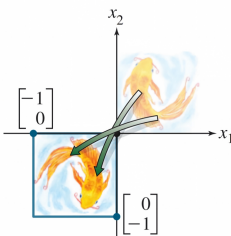
$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

几何直观：任意图形经恒等变换后保持原样，即什么都不做。

3.2 反射变换

定义：使平面内任意一点变成关于某条直线（轴）对称的点的变换。

TABLE 1 Reflections

Transformation	Image of the Unit Square	Standard Matrix
Reflection through the x_1 -axis		$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$
Reflection through the x_2 -axis		$\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$
Reflection through the line $x_2 = x_1$		$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$
Reflection through the line $x_2 = -x_1$		$\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$
Reflection through the origin		$\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$

3.3 伸缩变换

定义：把平面上的每个向量变成它的 k 倍的变换 ($k > 0$ 且 $k \neq 1$)。

几何直观：将图形按比例放大 ($k > 1$) 或缩小 ($k < 1$)，图形与原图形相似。

TABLE 2 Contractions and Expansions

Transformation	Image of the Unit Square	Standard Matrix
Horizontal contraction and expansion	$0 < k < 1$ $k > 1$	$\begin{bmatrix} k & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$
Vertical contraction and expansion	$0 < k < 1$ $k > 1$	$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & k \end{bmatrix}$

3.4 切变变换

定义：将平面内的每一点，沿着与某一坐标轴平行的方向，平移与该点到另一坐标轴的距离成比例的变换。

几何直观：图形中垂直于切变方向的坐标保持不变，而平行方向的坐标随另一坐标成比例平移，使得图形整体发生倾斜，例如正方形被推成平行四边形。

TABLE 3 Shears

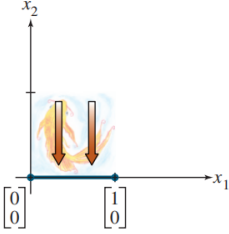
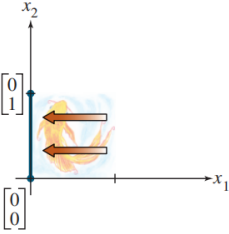
Transformation	Image of the Unit Square	Standard Matrix
Horizontal shear	$k < 0$ $k > 0$	$\begin{bmatrix} 1 & k \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$
Vertical shear	$k < 0$ $k > 0$	$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ k & 1 \end{bmatrix}$

3.5 投影变换

定义：把平面上任一点变成这点在坐标轴上的投影的变换。

几何直观：平行四边形经投影变换后，可能会被“压扁”成一条线段。投影变换通常不可逆。

TABLE 4 Projections

Transformation	Image of the Unit Square	Standard Matrix
Projection onto the x_1 -axis		$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$
Projection onto the x_2 -axis		$\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

3.6 旋转变换

定义：将平面内任意点绕原点沿逆时针方向旋转 θ 角的变换。

$$A = \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix}$$

当 $\theta = 90^\circ$ （逆时针旋转）时， $A = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ ；当 $\theta = 270^\circ$ （顺时针旋转 90° ）时， $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$ 。

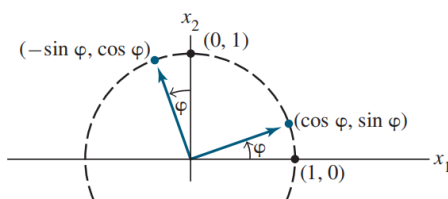


FIGURE 1 A rotation transformation.

3.7 复合变换与矩阵乘法

对于平面内一个点 A ，先经过矩阵变换 T_1 得到 A' ，再对 A' 施以矩阵变换 T_2 ，这一过程称为**复合变换**。复合变换对应的矩阵等于两次变换矩阵的**乘积**：

$$T_2(T_1(\mathbf{v})) = (A_2 A_1) \mathbf{v}$$

这表明，矩阵乘法来源于线性变换的复合，且注意矩阵乘法的顺序。

总结

- **线性变换**是满足加法和数乘封闭性的映射，矩阵乘法 $T(\mathbf{v}) = A\mathbf{v}$ 是最典型的例子。
- 确定一个线性变换，需知道输入空间基向量的变换结果；选定基后，线性变换与矩阵一一对应。
- **矩阵的列**是输入基向量经变换后在输出基下的坐标。
- 常见的特殊矩阵变换（恒等、反射、伸压、旋转、投影）是最基础的线性变换，在几何直观与坐标表示之间建立了直接联系。