

MIT 18.06 线性代数

第三十三讲：左右逆和伪逆

整理自 MIT 18.06 课程及相关公开笔记

引言

本讲从矩阵逆的概念出发，根据矩阵的秩与行/列数之间的关系，系统地介绍不同类型的逆：左逆、右逆，以及当矩阵既非列满秩也非行满秩时的伪逆。这些概念将矩阵的秩、四个子空间、投影与分解等知识紧密联系在一起，是线性代数最终的核心话题之一。

1 满秩矩阵

对于一个 $m \times n$ 的矩阵 A ，若满足秩 $r = m = n$ （满秩方阵），则存在唯一的逆矩阵 A^{-1} ，使得：

$$AA^{-1} = A^{-1}A = I$$

此时 A 是方阵且可逆，其逆矩阵是双侧的。

2 左逆矩阵 (Left Inverse)

2.1 列满秩时的左逆

若矩阵 A 的秩 $r = n < m$ ，即 A 为列满秩，它的列向量线性无关。此时：

- A 的零空间 $N(A)$ 仅包含零向量。
- 方程 $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ 要么无解，要么有唯一解（不存在自由变量）。

考虑矩阵 $A^T A$ ，它是一个 $n \times n$ 的对称矩阵，且因为 A 列满秩， $A^T A$ 可逆。因此：

$$(A^T A)^{-1} A^T A = I$$

定义 A 的左逆矩阵为：

$$A_{\text{left}}^{-1} = (A^T A)^{-1} A^T$$

左逆矩阵的维度是 $n \times m$ ，满足 $A_{\text{left}}^{-1} A = I_n$ 。

2.2 左逆矩阵的乘积

对于左逆矩阵，左乘 A 得到：

$$AA_{\text{left}}^{-1} = A(A^T A)^{-1} A^T = P$$

这是将 $\mathbb{R}^m$ 中的向量投影到矩阵 A 的列空间上的投影矩阵。

3 右逆矩阵 (Right Inverse)

3.1 行满秩时的右逆

若矩阵 A 的秩 $r = m < n$, 即 A 为行满秩, 它的行向量线性无关。此时:

- A^T 的零空间 (即 A 的左零空间) 仅包含零向量。
- 方程 $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ 恒有解, 且有无穷多解 (自由变量个数为 $n - m$)。

考虑矩阵 AA^T , 它是一个 $m \times m$ 的对称矩阵, 且因为 A 行满秩, AA^T 可逆。因此:

$$AA^T(AA^T)^{-1} = I$$

定义 A 的右逆矩阵为:

$$A_{\text{right}}^{-1} = A^T(AA^T)^{-1}$$

右逆矩阵的维度是 $n \times m$, 满足 $AA_{\text{right}}^{-1} = I_m$ 。

3.2 右逆矩阵的乘积

对于右逆矩阵, 右乘 A 得到:

$$A_{\text{right}}^{-1}A = A^T(AA^T)^{-1}A$$

这是将 $\mathbb{R}^n$ 中的向量投影到矩阵 A 的行空间上的投影矩阵。

4 伪逆矩阵 (Pseudoinverse)

4.1 伪逆的引入

当矩阵 A 的秩 $r < n$ 且 $r < m$ 时, 矩阵既非列满秩也非行满秩, 它的零空间和左零空间均非零, 这时不存在左逆或右逆。

从四个子空间的角度来看, 矩阵 A 将行空间 $C(A^T)$ 中的向量一一映射到列空间 $C(A)$ 中。这一映射是一一对应的。**证明:** 若行空间中存在向量 $\mathbf{x} \neq \mathbf{y}$, 但 $A\mathbf{x} = A\mathbf{y}$, 则 $A(\mathbf{x} - \mathbf{y}) = \mathbf{0}$ 。这意味着 $\mathbf{x} - \mathbf{y}$ 既在行空间中 (因为行空间对线性运算封闭), 又在零空间中。而零空间与行空间正交, 唯一的公共向量是零向量, 故 $\mathbf{x} - \mathbf{y} = \mathbf{0}$, 与假设矛盾。因此, 行空间到列空间的映射是可逆的, 其逆操作对应的矩阵称为伪逆矩阵, 记为 A^+ 。

伪逆矩阵 A^+ 满足: 对于行空间中的任意向量 $\mathbf{x}$, 有 $A^+A\mathbf{x} = \mathbf{x}$ 。同时, A^+ 的零空间恰好是 A^T 的零空间 (即左零空间)。

4.2 利用 SVD 计算伪逆

计算伪逆矩阵 A^+ 的标准方法是利用奇异值分解 (SVD)。对 Σ 求伪逆, Σ^+ 是一个 $n \times m$ 的矩阵, 其前 r 行对角线上为 $1/\sigma_1, 1/\sigma_2, \dots, 1/\sigma_r$ (即对非零奇异值取倒数), 其余位置为 0。

因此, 矩阵 A 的伪逆为:

$$A^+ = V\Sigma^+U^T$$

由于 U 和 V 是正交矩阵 ($U^T = U^{-1}$), 求伪逆的步骤简化为对 Σ 的逆运算。

$\Sigma\Sigma^+$ ($m \times m$) 和 $\Sigma^+\Sigma$ ($n \times n$) 是投影矩阵, 其前 r 个对角元素为 1, 其余为 0。

在 MATLAB 中, 使用 `B = pinv(A)` 计算矩阵 A 的摩尔-彭罗斯 (Moore-Penrose) 伪逆。

总结

- 双侧逆: $r = m = n$, 唯一且满足 $AA^{-1} = A^{-1}A = I$ 。
- 左逆: $r = n < m$, $A_{\text{left}}^{-1} = (A^T A)^{-1} A^T$, 满足 $A_{\text{left}}^{-1} A = I$ 。
- 右逆: $r = m < n$, $A_{\text{right}}^{-1} = A^T (AA^T)^{-1}$, 满足 $AA_{\text{right}}^{-1} = I$ 。
- 伪逆: $r < \min(m, n)$, 由 SVD 计算 $A^+ = V\Sigma^+U^T$ 。