

MIT 18.06 线性代数

第五讲：转置、对称与 $\mathbb{R}^n$ 空间

整理自 MIT 18.06 课程及相关公开笔记

引言

本讲标志着线性代数课程从“计算与分解”正式迈向“空间与结构”的转折点。我们将介绍转置矩阵与对称矩阵，然后引入线性代数中最为核心的概念——**向量空间** (Vector Space)、**子空间** (Subspace) 以及**列空间** (Column Space)。

1 转置矩阵与对称矩阵

1.1 转置矩阵

转置矩阵 (Transpose Matrix) 是将原矩阵的行和列互换得到的新矩阵。对于矩阵 A 及其转置 A^T ，满足如下对应关系：

$$(A^T)_{ij} = A_{ji}$$

也就是说， A^T 的第 i 行第 j 列的元素，等于原矩阵 A 的第 j 行第 i 列的元素。例如，三行二列的矩阵转置后变为二行三列：

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 3 \\ 4 & 1 \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 3 & 3 & 1 \end{bmatrix}$$

转置运算符合乘法法则： $(AB)^T = B^T A^T$ (注意顺序反转)。

1.2 对称矩阵

对称矩阵 (Symmetric Matrix) 是指那些转置后等于自身的方阵，即满足：

$$A^T = A$$

一个非常实用的性质是：对于任意矩阵 R (无需为方阵)，其乘积 $R^T R$ 恒为对称矩阵。**证明：**

$$(R^T R)^T = R^T (R^T)^T = R^T R$$

由于转置后等于其自身，因此 $R^T R$ 必为对称矩阵。这一性质在统计学和机器学习（如协方差矩阵、最小二乘法）中有极为广泛的应用。

2 向量空间

2.1 向量空间的定义

向量空间 (Vector Space) 是由若干向量构成的集合。该集合必须对两种基本的**线性运算** (向量加法、标量数乘) 保持**封闭性**, 也就是说, 空间中任意向量 $\mathbf{v}$ 、 $\mathbf{w}$ 的线性组合 $c\mathbf{v} + d\mathbf{w}$ 的结果, 仍然属于该空间。

2.2 $\mathbb{R}^n$ 空间

- **示例**: $\mathbb{R}^2$ 空间包含所有具有两个实数分量的向量 (如 $\begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix}$ 、 $\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$)。它在几何上表现为整个 xy 二维平面。**反例**: 仅包含第一象限内所有向量的集合 (即分量均为正数的二维向量集合) **不是** 向量空间, 因为当对一个非零向量乘以标量 -1 后, 结果会跑到第三象限, 脱离该集合, 不满足数乘封闭性。
- **推广**: $\mathbb{R}^n$ 空间包含所有具有 n 个实数分量的列向量。
- **重要推论**: 所有向量空间必须包含**零向量** (Zero Vector), 因为任何向量数乘 0 或加上其反向向量都会得到零向量。

3 子空间与列空间

3.1 子空间的定义

子空间 (Subspace) 是指包含在某个向量空间内的一个子集合, 且该子集本身也是一个向量空间 (即对线性运算封闭)。子空间必须包含零向量, 例如, $\mathbb{R}^2$ 空间中不经过原点的直线, 由于零向量不在此直线上, 因此一定不是子空间。

$\mathbb{R}^2$ 的全部子空间包括:

1. 整个 $\mathbb{R}^2$ 平面 (二维);
2. 过原点的任意一条直线 (一维);
3. 原点 Z (零维, 仅含零向量)。

$\mathbb{R}^3$ 的全部子空间包括:

1. 整个 $\mathbb{R}^3$ 空间 (三维);
2. 过原点的任意一个平面 (二维);
3. 过原点的任意一条直线 (一维);
4. 原点 Z (零维)。

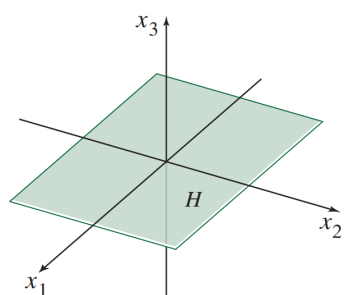


FIGURE 8
The x_1x_2 -plane as a subspace of $\mathbb{R}^3$.

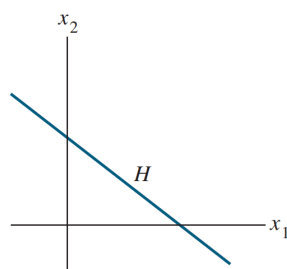


FIGURE 9
A line that is not a vector space.

3.2 矩阵的列空间

列空间 (Column Space) 是线性代数中最关键的子空间之一。给定一个 $m \times n$ 的矩阵 A ，它的列向量属于 $\mathbb{R}^m$ 空间，矩阵 A 的**列空间** (记为 $C(A)$) 就是由 A 的所有列向量的所有线性组合构成的集合。由于列向量的线性组合对加法、数乘运算自然封闭，因此列空间 $C(A)$ 必定是 $\mathbb{R}^m$ 的一个子空间。

示例： 设 $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 3 \\ 4 & 1 \end{bmatrix}$ ，它的两个列向量分别为 $\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{bmatrix}$ 和 $\mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} 3 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix}$ 。

- 这两个向量均属于 $\mathbb{R}^3$ 。
- 它们的线性组合 ($c_1\mathbf{v}_1 + c_2\mathbf{v}_2$) 在几何上勾勒出一个过原点的二维平面，这个平面就是 A 的列空间。
- 若矩阵 A 的两个列向量彼此共线 (成倍数关系)，那么它们的列空间将退化为一条过原点的直线，维度降为 1。

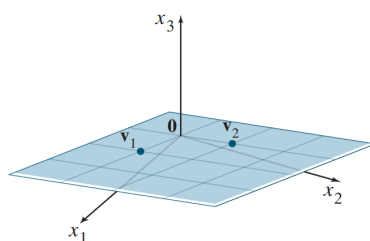


FIGURE 10
An example of a subspace.

总结

- 对于任意矩阵 R ， $R^T R$ 必定是一个**对称矩阵**。
- **向量空间**是封闭于线性运算的向量集合；**子空间**是向量空间内部满足同样封闭性的子集，且必须包含零向量。
- **列空间** $C(A)$ 是由矩阵列向量的线性组合构成的子空间，它是后续研究线性方程组 $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ 解的存在性的核心工具。