

MIT 18.06 线性代数

第六讲：列空间和零空间

整理自 MIT 18.06 课程及相关公开笔记

引言

本讲是上一讲关于“向量空间与子空间”的深入延续。我们将重点研究由矩阵生成的两个极其重要的子空间：**列空间** (Column Space) 和 **零空间** (Nullspace)。通过分析和对比这两种子空间，从几何与代数的双重维度重新理解线性方程组 $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ 的可解性。

1 子空间的交与并

在正式讨论列空间与零空间之前，我们需要先探讨子空间之间的运算性质。

1.1 子空间的并 ($P \cup L$)

回顾 $\mathbb{R}^3$ 空间中的两个子空间：一个过原点的平面 P 和一条过原点的直线 L 。将这两个子空间合并为一个集合 $P \cup L$ ，那么这个集合是否是 $\mathbb{R}^3$ 的子空间呢？**答案是否定的。**

理由：我们在 L 上取一个向量 $\mathbf{a}$ ，在 P 上取一个向量 $\mathbf{b}$ 。此时向量 $\mathbf{a} + \mathbf{b}$ 的方向通常会夹在直线与平面之间，既不在 L 上，也不在 P 上，从而脱离了 $P \cup L$ 的范围。这违反了向量空间对“加法封闭”的要求。

1.2 子空间的交 ($S \cap T$)

考察两个子空间 S 和 T 的公共部分，即它们的交集 $S \cap T$ ，这个集合是否构成子空间呢？**答案是肯定的。**

理由：交集 $S \cap T$ 受到 S 和 T 的双重约束，这意味着它同时继承了 S 和 T 对线性运算封闭的性质。

- **加法封闭：**任取 $\mathbf{v}, \mathbf{w} \in S \cap T$ ，因为 $\mathbf{v}, \mathbf{w} \in S$ ，且 S 是子空间，所以 $\mathbf{v} + \mathbf{w} \in S$ ；同理 $\mathbf{v} + \mathbf{w} \in T$ 。故 $\mathbf{v} + \mathbf{w} \in S \cap T$ 。
- **数乘封闭：**任取 $\mathbf{v} \in S \cap T$ 及标量 c ，因为 $\mathbf{v} \in S$ ，所以 $c\mathbf{v} \in S$ ；同理 $c\mathbf{v} \in T$ 。故 $c\mathbf{v} \in S \cap T$ 。

考虑一种特例，若在 $\mathbb{R}^3$ 中，平面 P 与直线 L 相交于原点，那么它们的交集就仅包含零向量 (**0** 空间)，这本身也是一个子空间。

2 矩阵的列空间

2.1 列空间的定义与维度

给定一个 $m \times n$ 的矩阵 A ，矩阵 A 的**列空间**，记为 $C(A)$ ，是由 A 的所有列向量的所有线性组合构成的集合。**重要性质**：对于 $m \times n$ 的矩阵 A ，其列向量含有 m 个分量，因此列空间 $C(A)$ 是 $\mathbb{R}^m$ 的一个子空间。

2.2 利用列空间理解 $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$

方程 $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ 是否有解，完全取决于向量 $\mathbf{b}$ 是否属于列空间 $C(A)$ 。**几何解释**： $\mathbf{x}$ 的分量正是对矩阵 A 的列向量进行线性组合时的组合系数。

- 如果 $\mathbf{b}$ 可以表示为 A 列向量的某种线性组合，则方程有解。
- 如果 $\mathbf{b}$ 无法表示为 A 列向量的线性组合，则方程无解。

2.3 列向量的线性相关性

考虑一个具体的矩阵示例：

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \\ 3 & 1 & 4 \\ 4 & 1 & 5 \end{bmatrix}$$

矩阵 A 共有三个列向量，均属于 $\mathbb{R}^4$ 。这三个列向量：

$$\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{v}_3 = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \end{bmatrix}$$

通过观察可以发现： $\mathbf{v}_3 = \mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2$ 。这意味着第三个列向量对张成空间没有任何新贡献，它可以被前两个列向量线性表示，称前两列为主列。因此，即使有三个列向量，矩阵 A 的列空间实际上是由两个列向量张成的 $\mathbb{R}^4$ 子空间（一个二维平面）。

3 矩阵的零空间

3.1 零空间的定义

矩阵 A 的**零空间**，记为 $N(A)$ ，是指满足方程 $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ 的所有解向量 $\mathbf{x}$ 构成的集合。**重要性质**：对于 $m \times n$ 的矩阵 A ，未知数向量 $\mathbf{x}$ 含有 n 个分量，因此零空间 $N(A)$ 是 $\mathbb{R}^n$ 的一个子空间。

3.2 零空间是子空间

为什么 $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ 的解集一定构成一个子空间？我们可以通过线性运算封闭性来严格证明：

- **加法封闭**：设 $\mathbf{v}$ 和 $\mathbf{w}$ 均为 $N(A)$ 中的解，则有 $A\mathbf{v} = \mathbf{0}$ 且 $A\mathbf{w} = \mathbf{0}$ 。根据矩阵乘法的分配律， $A(\mathbf{v} + \mathbf{w}) = A\mathbf{v} + A\mathbf{w} = \mathbf{0} + \mathbf{0} = \mathbf{0}$ ，所以 $\mathbf{v} + \mathbf{w}$ 也是解，仍在 $N(A)$ 中。

- **数乘封闭**: 设 $\mathbf{v}$ 为 $N(A)$ 中的解, c 为任意实数, 则 $A(c\mathbf{v}) = c(A\mathbf{v}) = c\mathbf{0} = \mathbf{0}$, 所以 $c\mathbf{v}$ 仍在 $N(A)$ 中。

因此, $N(A)$ 对线性运算封闭, 是一个真正的向量空间。

A more dynamic description of $\text{Nul } A$ is the set of all $\mathbf{x}$ in $\mathbb{R}^n$ that are mapped into the zero vector of $\mathbb{R}^m$ via the linear transformation $\mathbf{x} \mapsto A\mathbf{x}$. See Figure 1.

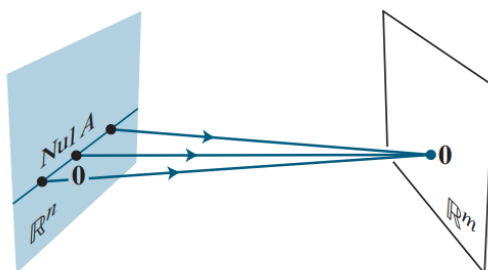


FIGURE 1

3.3 求矩阵 A 的零空间

继续以前面的矩阵 A 为例。因为其第三列等于第一列加第二列, 即 $\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2 - \mathbf{v}_3 = \mathbf{0}$, 我们可以直接写出方程 $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ 的一个解:

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

由于零空间对数乘封闭, 所以它所有的解就是该向量的任意标量倍数 (即包含所有形如 $c \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}$ 的向量)。在几何上, 这个零空间表现为 $\mathbb{R}^3$ 中一条穿过原点的直线。

3.4 非齐次方程的解集

考虑非齐次方程 $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ (此时 $\mathbf{b} \neq \mathbf{0}$), 其解集是否还能构成一个子空间呢? **答案是否定的。**

理由: 将零向量 $\mathbf{0}$ 代入 $A\mathbf{0} = \mathbf{0}$, 显然不等于非零的 $\mathbf{b}$, 说明零向量根本不在其解集中。正如我们反复强调的, 任何向量空间都必须包含零向量, 连这个基本条件都不满足, 其解集自然不可能是子空间。几何上, 这些解集表现为 $\mathbb{R}^n$ 中的一条直线或一个平面, 但它们**不过原点**, 发生了一定的平移。

总结

- **子空间的性质**: 任意两个子空间的并集通常不是子空间, 但它们的交集一定是子空间。
- 列空间 $C(A)$ 是 $\mathbb{R}^m$ 的子空间, 方程 $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ 有解当且仅当 $\mathbf{b}$ 属于列空间。
- 零空间 $N(A)$ 是 $\mathbb{R}^n$ 的子空间, 它是方程 $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ 的所有解。
- 这两种视角为我们提供了两种理解与构建子空间的方法, 是后续讨论矩阵的秩、线性无关以及维数定理的重要基石。