

MIT 18.06 线性代数

第七讲：求解 $A\mathbf{x} = 0$

整理自 MIT 18.06 课程及相关公开笔记

引言

上一讲中已经定义了矩阵的列空间与零空间。本讲将从定义过渡到具体的算法实现，重点讨论如何系统性地计算矩阵 A 的零空间，即求出所有满足 $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ 的向量 $\mathbf{x}$ 。

1 消元法求解零空间

1.1 消元至行阶梯形式

对于 $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ 这个方程组，因为右侧向量为零，所以无需使用增广矩阵，只需对系数矩阵 A 进行消元。对矩阵进行行操作虽然会改变其列空间，但**不会改变方程组的解，因此也不会改变零空间**。

以一个具体的 3×4 矩阵为例：

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 & 2 \\ 2 & 4 & 6 & 8 \\ 3 & 6 & 8 & 10 \end{bmatrix}$$

为了计算其零空间，首先使用高斯消元法将 A 化为**行阶梯形矩阵** (Row Echelon Form) U 。第一步消元：利用第一列的主元 1，将第二行减去第一行的 2 倍，第三行减去第一行的 3 倍，得到：

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 2 & 4 \end{bmatrix}$$

第二步消元：第一列向下找不到非零主元，故移至第二列。第二列同样是自由列，继续移至第三列，得到第二个主元 2。将第三行减去第二行的 1 倍，最终得到：

$$U = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

此时第三行变为零，这说明原矩阵 A 的第三行是第一行与第二行的线性组合，该行被消去了。

1.2 主变量与自由变量

在消元得到矩阵 U 后，可以给出以下关键定义：

- **主元 (Pivot)**：消元过程中阶梯处非零的元素。本例中有两个主元，因此矩阵的**秩 (Rank)** 为 $r = 2$ 。

- **主元列** (Pivot Columns) 与 **主变量** (Pivot Variables): 主元所在的列称为主元列, 本例中为第 1 列和第 3 列。对应的变量 x_1 和 x_3 称为主变量, 主变量的个数等于矩阵的秩 r 。
- **自由列** (Free Columns) 与 **自由变量** (Free Variables): 不包含主元的列称为自由列, 本例中为第 2 列和第 4 列。对应的变量 x_2 和 x_4 称为自由变量, 自由变量的个数为 $n - r = 4 - 2 = 2$ 。

自由变量之所以“自由”, 是因为回代求解时它们可以被任意赋值, 继而推导出主变量对应的解。

2 回代求解特解

为了覆盖整个零空间, 可以通过为自由变量赋予特定的数值来求出**特解** (Special Solutions)。常用的赋值方法是“依次给一个自由变量赋值为 1, 其余自由变量赋值为 0”。

第一个特解: 令 $x_2 = 1, x_4 = 0$ 。代入原方程组 (以 U 的形式, 且右侧为零):

$$\begin{cases} 2x_3 + 4x_4 = 0 \\ x_1 + 2x_2 + 2x_3 + 2x_4 = 0 \end{cases}$$

通过回代可得 $x_3 = 0$, 进而求得 $x_1 = -2$ 。因此, 第一个特解为:

$$\mathbf{s}_1 = \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

第二个特解: 令 $x_2 = 0, x_4 = 1$ 。代入方程组得到:

$$\begin{cases} 2x_3 + 4(1) = 0 \implies x_3 = -2 \\ x_1 + 2(0) + 2(-2) + 2(1) = 0 \implies x_1 = 2 \end{cases}$$

因此, 第二个特解为:

$$\mathbf{s}_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

通过以上步骤可知, 一个矩阵的自由变量个数等于零空间特解的个数, 也就是零空间的**维数**。整个零空间即为这些特解的任意线性组合构成的集合:

$$N(A) = \text{Span}\{\mathbf{s}_1, \mathbf{s}_2\} = c_1 \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + c_2 \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (c_1, c_2 \in \mathbb{R})$$

3 行简化阶梯形矩阵与零空间矩阵

3.1 化简为行简化阶梯形式

将上述消元得到的上三角矩阵 U 进一步化简为**行简化阶梯形矩阵** (Reduced Row Echelon Form, 简称 RREF), 记为 R (在 MATLAB 中可以通过 `rref(A)` 命令直接得到)。具体步骤为:

1. 将主元化为 1：使主元列的数值归一。
2. 向上消元：使主元列除主元本身外均为 0。

对前面的矩阵 U 进行以上操作，可得：

$$R = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

3.2 列交换与分块形式

如果在 R 的左侧进行适当的**列交换**，将主元列全部集中到矩阵的左侧，而将自由列集中到右侧，矩阵 R 可被重写为如下分块形式：

$$R = \begin{bmatrix} I_{r \times r} & F_{r \times (n-r)} \\ 0_{(m-r) \times r} & 0_{(m-r) \times (n-r)} \end{bmatrix}$$

其中 I 是 $r \times r$ 的单位阵，对应主列； F 是 $r \times (n-r)$ 的矩阵，对应经过消元后的自由列。

3.3 零空间矩阵的构造

根据上述分块形式，方程 $R\mathbf{x} = \mathbf{0}$ 可写为：

$$\begin{bmatrix} I & F \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x}_{\text{pivot}} \\ \mathbf{x}_{\text{free}} \end{bmatrix} = \mathbf{0} \implies I\mathbf{x}_{\text{pivot}} + F\mathbf{x}_{\text{free}} = \mathbf{0} \implies \mathbf{x}_{\text{pivot}} = -F\mathbf{x}_{\text{free}}$$

若选取特解时的自由变量组合 $\mathbf{x}_{\text{free}}$ 恰好为单位阵 I 的各列，则可以直接构造出**零空间矩阵** N ，其列向量即为零空间的一组特解：

$$N = \begin{bmatrix} -F \\ I \end{bmatrix}$$

其中下部的 I 是大小为 $(n-r) \times (n-r)$ 的单位阵，对应自由变量的个数；上部的 $-F$ 是与主变量相对应的部分。验证可得：

$$RN = \begin{bmatrix} I & F \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -F \\ I \end{bmatrix} = -F + F = \mathbf{0}$$

这表明矩阵 N 的每一列都是 $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ 的特解，而 N 的列空间即为矩阵 A 的零空间。

总结

本讲完整介绍了计算矩阵 A 零空间的系统化算法：

- **消元**：将矩阵 A 化为行阶梯形矩阵 U ，并确定矩阵的秩 r 。
- **分类变量**：确定 r 个**主变量**和 $n-r$ 个**自由变量**。
- **求特解**：依次给自由变量赋值为 0 和 1，回代得到 $n-r$ 个**特解**。
- **构造零空间矩阵**：将 U 进一步化为行阶简化梯形式 R 。通过对 R 进行列交换得到标准分块形式，直接构造零空间矩阵 $N = \begin{bmatrix} -F \\ I \end{bmatrix}$ 。通过求解 $RN = \mathbf{0}$ 即可得出零空间的完整表示。