

MIT 18.06 线性代数

第八讲：求解 $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$

整理自 MIT 18.06 课程及相关公开笔记

引言

上一讲中已经讨论了如何通过消元法系统地求解齐次方程 $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ 的零空间。本讲将研究更一般的情况，即如何求解非齐次方程组 $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ ，并探讨解的结构。通过结合矩阵的秩，可以清晰地判断方程解的数量（无解、唯一解、无穷多解）。

1 $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ 的可解性条件

1.1 列空间角度

根据之前对列空间的讨论，方程 $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ 有解，当且仅当向量 $\mathbf{b}$ 属于矩阵 A 的列空间 $C(A)$ 。

1.2 线性组合角度

以一个具体的 3×4 矩阵为例：

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 & 2 \\ 2 & 4 & 6 & 8 \\ 3 & 6 & 8 & 10 \end{bmatrix}$$

观察矩阵 A 可以发现，它的第三行恰好等于第一行与第二行之和，这意味着，如果方程 $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ 有解，那么常数向量 $\mathbf{b}$ 的各个分量必然也满足相同的线性关系，即 $b_3 = b_1 + b_2$ 。

对增广矩阵 $[A \mid \mathbf{b}]$ 进行高斯消元，可以得到这一结论在代数上的直接体现：

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 & 2 & b_1 \\ 2 & 4 & 6 & 8 & b_2 \\ 3 & 6 & 8 & 10 & b_3 \end{bmatrix} \xrightarrow{\text{消元}} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 & 2 & b_1 \\ 0 & 0 & 2 & 4 & b_2 - 2b_1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & b_3 - b_2 - b_1 \end{bmatrix}$$

当矩阵 A 消元后出现全零行时，该行对应的方程要想成立，右侧对应位置的常数项也必须为 0。因此，本例的可解条件为 $b_3 - b_2 - b_1 = 0$ 。只要向量 $\mathbf{b}$ 满足此条件（即 $\mathbf{b}$ 位于 A 的列空间内），方程组就有解。

2 通解的结构

2.1 特解的求解

求解非齐次方程组 $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ ，首先需要找到一个**特解** (Particular Solution)，记为 $\mathbf{x}_p$ 。求特解最简单的方法是：将所有**自由变量**的值赋为 0，然后回代求解**主变量**。仍以矩阵 $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 & 2 \\ 2 & 4 & 6 & 8 \\ 3 & 6 & 8 & 10 \end{bmatrix}$ 为例，已知其自由变量为 x_2, x_4 。令 $x_2 = 0, x_4 = 0$ 并回代消元后的上三角方程组，可得：

$$\begin{cases} 2x_3 = b_2 - 2b_1 \\ x_1 + 2x_3 = b_1 \end{cases}$$

若令 $\mathbf{b} = \begin{bmatrix} 1 \\ 5 \\ 6 \end{bmatrix}$ ，可解得 $x_3 = 3/2, x_1 = -2$ 。因此求得一个特解为： $\mathbf{x}_p = \begin{bmatrix} -2 \\ 0 \\ 3/2 \\ 0 \end{bmatrix}$ 。

2.2 通解的表达

方程组 $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ 的**通解** (Complete Solution) 由特解加上零空间中的任意向量构成。记零空间中的一般向量为 $\mathbf{x}_n$ ，则通解为：

$$\mathbf{x}_{\text{complete}} = \mathbf{x}_p + \mathbf{x}_n$$

理由：根据矩阵乘法的分配律， $A(\mathbf{x}_p + \mathbf{x}_n) = A\mathbf{x}_p + A\mathbf{x}_n = \mathbf{b} + \mathbf{0} = \mathbf{b}$ 。这意味着，在特解的基础上加上任何属于零空间的向量，仍然是原方程的解。

对于上述示例，通解即为：

$$\mathbf{x}_{\text{complete}} = \begin{bmatrix} -2 \\ 0 \\ 3/2 \\ 0 \end{bmatrix} + c_1 \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + c_2 \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (c_1, c_2 \in \mathbb{R})$$

从几何角度看，零空间 $N(A)$ 是 $\mathbb{R}^4$ 中的一个二维平面，而方程 $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ 的所有解则构成一个过 $\mathbf{x}_p$ 点且平行于此零空间的平面。这个解集本身不是向量空间，因为不含零向量。

3 秩与解结构的关系

矩阵的秩 r 等于矩阵主元的数量。对于 $m \times n$ 的矩阵 A ，秩满足 $r \leq m$ 且 $r \leq n$ 。根据矩阵秩的大小，可以分情况讨论 $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ 解的结构。

3.1 列满秩 (Full Column Rank): $r = n < m$

当所有列均为主元列时，没有自由变量，零空间的维度为 $n - r = 0$ ，即零空间中仅有零向量。
解的情况：要么无解（若 $\mathbf{b}$ 不在列空间中），要么有**唯一解**。

矩阵形式：消元化简后，矩阵 R 的形式为 $\begin{bmatrix} I_{n \times n} \\ 0_{(m-n) \times n} \end{bmatrix}$ ，仅需检查底部零行对应的 $\mathbf{b}$ 分量是否满足可解条件。

3.2 行满秩 (Full Row Rank): $r = m < n$

矩阵的列空间已充满整个 $\mathbb{R}^m$ 空间。对于任意的 $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^m$, 方程组 $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ 必定有解。

解的情况: 有无穷多解。因为存在 $n - r > 0$ 个自由变量。

矩阵形式: 消元化简后, 矩阵 R 的形式为 $[I_{m \times m} \quad F_{m \times (n-m)}]$ 。

3.3 行列皆满秩 (Full Rank Square Matrix): $r = m = n$

当矩阵 A 是可逆方阵时, 零空间仅有零向量, 且列空间充满整个空间。

解的情况: 对任意 $\mathbf{b}$ 都有唯一解。

矩阵形式: 化简后 R 为单位矩阵 I 。

3.4 不满秩 (Rank Deficient): $r < m$ 且 $r < n$

矩阵 A 的行和列均线性相关 (包含零行及自由列)。

解的情况: 方程要么无解 (若 $\mathbf{b}$ 不在列空间内, 通常由消元后的零行产生可解条件), 要么有无穷多解 (因为存在 $n - r$ 个自由变量)。

矩阵形式: 化简后 R 的形式为 $\begin{bmatrix} I_{r \times r} & F_{r \times (n-r)} \\ 0_{(m-r) \times r} & 0_{(m-r) \times (n-r)} \end{bmatrix}$ 。

综合上述秩的讨论, 可将 R 的形式及其对应的解情况总结如下:

- $r = m < n$ 时, $R = [I \quad F]$, 对应 **无穷多解**。
- $r = n < m$ 时, $R = \begin{bmatrix} I \\ 0 \end{bmatrix}$, 对应 **0 个解或 1 个解**。
- $r = m = n$ 时, $R = [I]$, 对应 **唯一解**。
- $r < m, r < n$ 时, $R = \begin{bmatrix} I & F \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$, 对应 **0 个解或无穷多解**。

综上所述, 判断 $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ 解的情况, 其核心取决于以下两个条件: 1. **有解性:** 检验 $\mathbf{b}$ 是否属于列空间 $C(A)$, 即 $\mathbf{b}$ 是否满足由消元零行推出的线性组合条件, 等价于 $r(A) = r([A|\mathbf{b}])$ 。2. **解的唯一性:** 检验零空间 $N(A)$ 中是否只有零向量, 即是否存在自由变量, 等价于 $r = n$ 。

总结

本讲完整阐述了求解非齐次线性方程组 $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ 的算法流程:

1. **检查可解性:** 判断向量 $\mathbf{b}$ 是否属于矩阵 A 的列空间。通过增广矩阵的消元, 验证消元后产生的零行右侧是否也为 0。
2. **求解特解:** 将消元后的方程组中所有自由变量赋值为 0, 回代求出主变量, 得到特解 $\mathbf{x}_p$ 。
3. **构造通解:** 将特解 $\mathbf{x}_p$ 与矩阵 A 的零空间中的所有向量 (通过特解的任意线性组合) 相加, 得到通解: $\mathbf{x} = \mathbf{x}_p + \mathbf{x}_n$ 。
4. 秩 r 是决定解结构的关键。若 $r = n$, 则解唯一; 若 $r < n$, 则存在无穷多解。若 $\mathbf{b}$ 不在列空间中, 则无解。

