

MIT 18.06 线性代数

第九讲：线性相关、基、维数

整理自 MIT 18.06 课程及相关公开笔记

引言

在前几讲中，我们讨论了线性方程组 $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ 的可解性及解的结构，并学习了如何计算矩阵的列空间与零空间。本讲将从更深层次上探讨这两个子空间的结构，引入几个核心概念：**线性无关**、**基**和**维数**。这些概念是将矩阵的代数性质与其几何空间的维度联系起来的关键纽带。

1 线性相关与线性无关

1.1 基本定义与几何直观

给定一组向量 $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_n$ ，若存在一组不全为零的系数 $c_1, c_2, \dots, c_n$ ，使得线性组合：

$$c_1\mathbf{v}_1 + c_2\mathbf{v}_2 + \dots + c_n\mathbf{v}_n = \mathbf{0}$$

成立，则称这组向量**线性相关** (Linearly Dependent)。反之，若只有在系数 $c_1 = c_2 = \dots = c_n = 0$ 时上述等式才成立，则称这组向量**线性无关** (Linearly Independent)。

从几何直观来看：

- 在 $\mathbb{R}^2$ 空间中，两个不在同一直线上的向量是线性无关的；若在同一直线上（成倍数关系），则为线性相关。



- 在 $\mathbb{R}^3$ 空间中，三个不共面的向量是线性无关的；若三个向量均位于同一平面内，则线性相关。



1.2 与零空间及秩的联系

上述定义可与方程 $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ 建立直接联系。若将向量 $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n$ 作为列向量构成矩阵 A ，则：

- **线性无关** $\iff$ 矩阵 A 的零空间 $N(A)$ 中仅有零向量（即 $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ 仅有零解）。
- **线性相关** $\iff$ 矩阵 A 的零空间 $N(A)$ 中含有非零向量（即存在非零解）。

从矩阵的秩的角度来看：

- 若列向量线性无关，则所有列均为**主元列**，秩 $r = n$ ，没有自由变量。
- 若列向量线性相关，则存在**自由列**，秩 $r < n$ ，自由变量个数为 $n - r$ 。

1.3 判定示例

例如给定三个向量：

$$\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 5 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{v}_3 = \begin{bmatrix} 3 \\ 3 \\ 8 \end{bmatrix}$$

由这三个向量构成的矩阵，其第二行等于第一行，显然存在全零行。行向量线性相关，意味着列向量也一定线性相关（ $\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_3 = 2\mathbf{v}_2$ ），因此矩阵不可逆，这三个向量无法构成 $\mathbb{R}^3$ 空间的一组基。

2 张成空间与基

2.1 张成空间

若一个空间由向量组 $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_k$ 的所有线性组合构成，则称该向量组**张成**（Span）了这个空间，这个空间就是包含了这些向量的最小空间。例如，矩阵 A 的所有列向量的线性组合，张成矩阵 A 的列空间。

2.2 基的定义

向量空间的一组**基**（Basis）是指具有以下两个性质的向量序列 $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_d$ ：

1. **线性无关**：组内所有向量彼此线性无关。
2. **能张成整个空间**：该空间中的任意向量都可以唯一地表示成这组向量的线性组合。

对于 $\mathbb{R}^n$ 空间，基中的向量个数一定为 n 个，并且，以这 n 个向量为列构成的 $n \times n$ 矩阵必须是可逆矩阵。

3 空间的维数

3.1 维数的定义

一个空间的**维数**（Dimension）被定义为该空间任一基中所包含向量的个数。一个重要的结论是：同一个空间可以有很多组不同的基，但其维数（即基向量的个数）是唯一确定的。

3.2 列空间的维数

根据上述概念，矩阵 A 的秩与列空间维数之间存在如下等价关系：

$$r(A) = \text{主元列的个数} = \text{列空间 } C(A) \text{ 的维数}$$

在实际应用中，只需在矩阵的所有列向量中找出 r 个线性无关的向量，就可以构成列空间的一组基。

3.3 零空间的维数

对于 $m \times n$ 的矩阵 A ，其零空间的维数可由自由变量的个数决定，其公式为：

$$\text{零空间 } N(A) \text{ 的维数} = \text{自由变量的个数} = n - r$$

其中 n 为未知量（矩阵列数）的总数， r 为矩阵的秩（主元个数）。

4 综合示例

假设矩阵 A 为：

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 1 \end{bmatrix}$$

对其列向量进行分析，可以发现第 3 列等于第 1 列与第 2 列之和，而第 4 列等于第 1 列。因此，真正对张成空间做出贡献的只有前两个列向量（列 1 与列 2）。

1. **列空间** $C(A)$ ：前两列线性无关，因此它们是 A 的主元列，所以 $C(A)$ 的一组基为 $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ 和 $\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$ 。

该矩阵的秩为 2，列空间维数为 2。

2. **零空间** $N(A)$ ：由于列向量存在线性关系，通过求解 $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ ，可以得到零空间的特解，两个特解构成了零空间的一组基。由于总共有 4 个变量，秩为 2，因此零空间的维数为 $n - r = 4 - 2 = 2$ 。

总结

本讲建立了一系列核心概念间的等价联系：

- **线性相关性**直接等价于方程组 $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ 是否存在非零解，也等价于矩阵是否存在自由列。
- **基**是张成空间所需的最小线性无关向量组，它包含了该空间的所有结构信息。
- **维数**是描述空间大小的核心指标：
 - 列空间的维数 = 矩阵的秩 r
 - 零空间的维数 = 自由变量的个数 $n - r$

这些概念将矩阵的代数计算与几何空间直观地统一起来，为后续进一步讨论四个基本子空间及正交性奠定了基础。